

Equivalence des critères de réduction

(1) $\mathcal{B}$ est q -orthogonale : $\forall i \neq j \quad e_i \perp e_j \Leftrightarrow \phi(e_i, e_j) = 0$

$\Updownarrow$

(2) $M_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale

$\overset{\text{u.d.f.}}{M_{\mathcal{B}}(\phi)} = (\phi(e_i, e_j))$ diagonale ssi

$$\forall i \neq j \quad \phi(e_i, e_j) = 0$$

(1) $\Leftrightarrow$ (3)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{B}$ q -orthogonale, $(f_1, \dots, f_n)$ base duale de $\mathcal{B}$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in \mathbb{R}$$

$$q(x) = q(x_1 e_1) + q(x_2 e_2) + \dots + q(x_n e_n)$$

$$= x_1^2 q(e_1) + \dots + x_n^2 q(e_n)$$

On pose $d_i = q(e_i)$, on a

$$\sum_{i=1}^n d_i f_i(x)^2 = \sum_{i=1}^n q(e_i) x_i^2$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $q(x) = \sum_i d_i f_i(x)^2 \quad d_i \in \mathbb{R} \quad (f_i) \text{ base de } E^*$

On pose B la base contraduale de la base (f_i)

On montre que B est q -orthogonale

Soit $i \neq j$, $e_i \perp e_j \Leftrightarrow q(e_i + e_j) = q(e_i) + q(e_j)$
or on a bien

$$q(e_i + e_j) = \sum_k d_k (f_k(e_i) + f_k(e_j))^2$$

$$= \sum_{k=i} d_i + \sum_{k=j} d_j = q(e_i) + q(e_j)$$

Résumé: Pour définir q , il suffit de trouver $(f_1, \dots, f_n)$ et $d_i \in \mathbb{R}$
des formes linéaires indépendantes telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^n d_i f_i(x)^2$$

Alors la base contraduale des (f_i) est une base orthog.

$(e_i)_{i=1}^n$ est la matrice de q sur cette base est $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$
 $d_i = q(e_i)$