

q : forme quadratique

il existe ϕ lb telle $q(x) = \phi(x, x)$

On fixe une base $\mathcal{B}$, on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} \phi$

$$\text{d'où } q(x) = x^t A x$$

$$\text{On pose } \phi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

$$= \frac{1}{2} [(x+y)^t A (x+y) - x^t A x - y^t A y]$$

$$= \frac{1}{2} [\cancel{x^t A x} + x^t A y + y^t A x + \cancel{y^t A y} - \cancel{x^t A x} - \cancel{y^t A y}]$$

mai) $y^t A x$ est une matrice 1×1

$$\text{d'où } y^t A x = (y^t A x)^t = x^t A^t y$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \phi(x, y) &= \frac{1}{2} [x^t A y + x^t A^t y] \quad \text{c'est une} \\ &= x^t \left[\frac{1}{2} (A + A^t) \right] y \quad \text{lbs} \end{aligned}$$

$$\phi(x, x) = \frac{1}{2} [q(2x) - q(x) - q(x)] = q(x)$$

d'où ϕ définit bien q

Posons $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ matrice de ϕ sur $\mathcal{B}$

↖ où A matrice sur $\mathcal{B}$ d'une fb
définissant q

Donc si ψ une fb 5 définissant q de

matrice C sur $\mathcal{B}$, on a aussi $S = \frac{1}{2}(C + C^t)$

mais $C^t = C$ d'où $S = C$ donc $\phi = \psi$. $\square$