

Sur $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 6x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. Matrice de ϕ

$$\phi(x, y) = x^t A y = (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\phi(x, y) = x_1 (y_1 + 6y_3) + x_2 (2y_1 + y_2 - 3y_3) + x_3 (y_1 + y_2 + 3y_3)$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 + 6y_3 \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$

matrice de ϕ sur base canonique

Noyau (à gauche) de ϕ :

$$\text{Ker } \phi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \phi(x, y) = 0\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$x \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R} \quad \phi\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$$

$$y_1(x_1 + 2x_2 + 3x_3) + y_2(x_2 + x_3) + y_3(6x_1 - 3x_2 + 3x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 & (L_1) \\ x_2 + x_3 = 0 & (L_2) \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

Th: l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires ^{homogènes} indépendantes de m équations en n variables est de dimension $n-m$.

échelonnés

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad (L_1)$$

$$x_2 + x_3 = 0 \quad (L_2)$$

$$-15x_2 - 15x_3 = 0 \quad (L_3) - 6(L_1)$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x_2 + x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\text{Ker } \phi$ est un s.v. de dim. 1
avec pour base $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ex. dim 2

$\left(\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \right) \leftarrow$ on cherche sous la forme

2. Matrice de ϕ sur la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $v_1 \quad v_2 \quad v_3$

1^{ère} méthode : matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis la formule}$$

$\rightarrow$ matrice $P^t A P \dots$

2^e méthode : on calcule $\phi(v_i, v_j) \forall i, j$
...

3. Calculer $v_1^\perp$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x \in v_1^\perp \Leftrightarrow \phi(x, v_1) = 0 \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_1 + x_2 + 3x_3} + \underbrace{6x_1 + 2x_2 - 2x_2 + 3x_3 + x_3}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x_1 + 7x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0$$

$V_1^\perp$ est s.e. de dim $3-1=2$

de base $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$