

2. Reconnaitre les groupes suivants.

- S_n/A_n : S_n permutations sur $\{1, \dots, n\}$
 $A_n \subseteq S_n$ permutations paires

$$\text{sign}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$
$$\sigma \mapsto \text{sign}(\sigma)$$

or $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$

C'est un morphisme de groupes !

$$\text{Ker}(\text{sign}) = \{ \sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = 1 \} = A_n$$

D'où th. de factorisation: $n \geq 2$

$$S_n/A_n \simeq \text{Im}(\text{sign}) = \{\pm 1\}$$

- $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ \eta \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \eta^t = \eta^{-1} \}$$

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{ \eta \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det \eta = 1 \}$$

On considère $f: O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ morphisme
 $n \mapsto \det(n)$

$\text{Ker } f = SO_n(\mathbb{R})$ par construction

d'où $O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \cong \text{Im } f = \{\pm 1\}$

car $n^t = n^{-1} \Rightarrow \det(n^t) = \det(n^{-1})$

$\Rightarrow \det(n) = \det(n)^{-1}$

$\Rightarrow \det(n) = \pm 1$

On a $S_n / A_n \cong O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R})$

• $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R})$ $S_n(\mathbb{R}) = \{n \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det n = 1\}$

On considère $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
 $n \mapsto \det(n)$

d'où $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$

• $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$ $f: x \mapsto \frac{|x|}{x} \in \{\pm 1\}$

$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \cong \{\pm 1\}$

• $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$
 Sous-groupe de $\mathbb{C}^*$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $x \mapsto e^{2i\pi x}$ morphisme...

