

Exercice : Soit $x \in G$ d'ordre n .

Montrer que $x^t = e \Leftrightarrow n \mid t$

$\Leftarrow$ Supposons $n \mid t$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = nk$ d'où

$$x^t = x^{nk} = (x^n)^k = e^k = e$$

$\nearrow$
car x d'ordre n

$\Rightarrow$ | Supposons que $x^t = e$, on veut montrer que $n \mid t$. On écrit la division euclidienne de t par n :

$$t = nq + r \text{ avec } 0 \leq r < n$$

avec (q, r) unique $\rightarrow r = t - nq$

$$\text{On a } x^r = x^{t-nq} = x^t \cdot x^{-nq} = \underbrace{x^t}_e \cdot \underbrace{(x^n)^{-q}}_e$$

d'où $x^r = e$. Si $\boxed{r \neq 0}$ alors on a $1 \leq r < n$ or $x^r = e$ impossible par minimalité de n

A'ou $v = 0$, c'ev - a dire $t \leq nq$, n/A . $\square$

Σ : G ev fini don tous ls elments de G sont d'ordre fini.

Soit $g \in G$, on considere la suite $g^1, g^2, g^3, \dots$ d'elements de G . Puisque G ev fini, il existe $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ avec $n \neq m$ et $g^n = g^m$.

Dison, par exemple, $n < m$ abs multiplie g^{-n}

$$\underbrace{g^{m-n}}_{\text{ou } m-n \geq 1} = \underbrace{g^{n-n}}_{= g^0} = g^0 = e$$

Or a: il existe $A \geq 1$ tel que $g^A = e$
donc g ev d'ordre fini ($\leq A$)