

$f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ measurable

1. F, G fermés, non vides, disjoint
de (X, d)

$$\phi : x \mapsto \frac{d(x, G)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

Alors

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

$$A \subseteq X$$

Montrer : ① ϕ continue

② $\phi|_F = 1$ et $\phi|_G = 0$

② Soit $x \in F$ alors $d(x, F) = 0$ et $d(x, G) \neq 0$

car $F \cap G = \emptyset$
et ainsi pour G

$$\text{donc } \phi(x) = \frac{d(x, G)}{d(x, F) + d(x, G)} = 1$$

Soit $x \in G$ alors $d(x, G) = 0$ donc $\phi(x) = 0$

(note = $d(x, F) \neq 0$ car $F \cap G = \emptyset$)

① ϕ est continue car c'est le quotient de deux ϕ et ainsi fermés

fonctions continues avec en dénominateur

$$d(x, F) + d(x, G) \neq 0 \quad \forall x$$

Preuve à faire : $x \mapsto d(x, G)$ est continue

Remarque : $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$