

$(X, \mathcal{E})$ espace mesurable

$(f_n)_n$ fonctions mesurables $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$A = \{x \in X \text{ tel que } \lim f_n(x) \text{ existe dans } \overline{\mathbb{R}}\}$

On montre que A est mesurable.

Soit $x \in X$, On a $\lim f_n(x)$ existe $\Leftrightarrow$

$$\liminf f_n(x) = \limsup f_n(x) \Leftrightarrow$$

$$\liminf f_n(x) - \limsup f_n(x) = 0$$

On pose $g: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 $(x, y) \mapsto x - y$

avec les conventions $+\infty - \infty = 0$, $(-\infty) - (-\infty) = 0$

Alors on montre que g est continue donc mesurable
et donc $h: x \mapsto g(\liminf f_n(x), \limsup f_n(x))$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{mesurable} & \text{mesurable} \\ \liminf f_n(x) & - \limsup f_n(x) \end{array}$$

est mesurable

donc $A = p^{-1}(\{0\})$ est mesurable
et mesurable car fermé