

1. $B \subseteq \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in B$ avec $x-b \in \mathbb{Q}$. Noter B mesurable $\Rightarrow \lambda(B) > 0$

On a $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q+B)$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$

$\exists b \in B$ avec $x-b \stackrel{q \in \mathbb{Q}}{=} q \in \mathbb{Q}$ donc $x \in q+B$
 $x = q+b$

Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il suit de $[0; +\infty[$

$$\lambda(\mathbb{R}) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(q+B) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(B)$$

Donc si $\lambda(B) = 0$, on a $\lambda(\mathbb{R}) = 0$ #
 donc $\lambda(B) > 0$

2. $B \subseteq [0; 1)$ telle que $\forall x, y \in B, x \neq y \Rightarrow x-y \notin \mathbb{Q}$

On considère $(q+B) \cap (q'+B)$ avec $q, q' \in \mathbb{Q}$
 $q \neq q'$

Soit $s \in (q+B) \cap (q'+B)$

Alors $s = q+x = q'+y$ avec $x, y \in B$

$\Rightarrow x-y = q'-q \in \mathbb{Q} \stackrel{x \neq y}{\Rightarrow} x=y \Rightarrow q=q' \#$

$$\text{donc } (q+B) \cap (q'+B) = \emptyset$$

On pose $\Delta = [0; 2] \cap \mathbb{Q}$ alors on a

$\forall \delta \in \Delta, \quad \delta+B \subseteq [0; 2]$ et les $\delta+B$ sont d. d. d.

$$\text{d'où } \bigcup_{\delta \in \Delta} (\delta+B) \subseteq [0; 2] \quad \leftarrow \quad \sum \delta+B \text{ mesurable}$$

$$\text{et ainsi } \lambda \left(\bigcup_{\delta \in \Delta} (\delta+B) \right) \leq 2$$

$$\sum_{\delta \in \Delta} \lambda(\delta+B) = \sum_{\delta \in \Delta} \lambda(B) \quad \leftarrow \text{infini}$$

$$\text{donc } \lambda(B) = 0$$

3. Supposons qu'il existe $B \subseteq \mathbb{R}$ vérifiant les

deux propriétés avec B non mesurable

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence

$x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$. On prend pour B

un système de représentation des classes d'équivalence.

↳ dans $[0;1]$

(on utilise ici l'axiome du choix)