

(X, d) métrique $f: X \rightarrow X$ avec

$$f(d(x), d(y)) < d(x, y) \quad \text{②}$$

pour $x \neq y$

1. Unique point fixe :

Supposons z et z' sont points fixes avec $z \neq z'$

alors ② $d(f(z), f(z')) < d(z, z')$

" $d(z, z')$ car $f(z) = z$ et $f(z') = z'$

Contradiction : donc $z = z'$

2. Il existe $z \in X$ tel que $d(z, f(z)) < d(x, f(x))$
 $\forall x \in X$

On pose $T: X \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto d(x, f(x))$

Alors T est continue. Pour cela on montre
que T est 2-Lipsch. ($\Rightarrow$ continue)

Soient $x, y \in X$. On suppose $spdg$:

$$T(x) \geq T(y)$$

$$\text{On a } |T(x) - T(y)| = T(x) - T(y)$$

$$= d(x, f(x)) - d(y, f(y))$$

$\sim y \text{ or } f(y)$

$$\leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) - d(y, f(y))$$

$$< d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

Puisque X est compact, T est bornée et elle atteint ses bornes : il existe $z \in X$ tel que $\forall x \in X, T(z) \leq T(x)$.

3. z est point fixe. $z \neq f(z)$

Supposons le contraire. Alors

$$d(z, f(z)) > d(f(z), f(f(z))) \text{ par } \circ$$

d'où $T(f(z)) < T(z)$ contradiction

Donc $f(z) = z$ et z est point fixe.

4. $x_0 \in X$. On pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$

Montrer $d(x_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \geq 0$

On pose $v_n = d(x_n, z)$.

On a $v_n = d(x_n, z) \geq d(f(x_n), f(z))$
pour $\underline{x_n \neq z}$ $\textcircled{*}$
 $d(x_{n+1}, z) = v_{n+1}$

Si $x_n = z$ alors $v_n = 0$ et

$$v_{n+1} = d(f(x_n), z) = d(f(z), z) \\ = d(z, z) = 0$$

et $v_m = 0 \quad \forall m \geq n$.

Donc (v_n) est minorée par 0 donc

elle converge vers $l \geq 0$.

5. Montrer $l = 0$ (et donc $x_n \rightarrow z$)

On suppose que $l > 0$. Puisque X est compact,
il existe une sous-suite $(x_{s(n)})$ convergente,

disons $x_{S(n)} \rightarrow y$. Et donc par la même
précédente, on a $d(x_{S(n)}, z) \rightarrow l$

$$\lim d(x_{S(n)}, z) = l$$

$$\Rightarrow d(\lim x_{S(n)}, z) = l \Rightarrow d(y, z) = l$$

$\hookrightarrow y \neq z$

f continue

On considère la sous-suite $(x_{S(n)+1}) = (f(x_{S(n)}))$

C'est aussi une sous-suite convergente.

En effet, f est continue (en fait 1-lipx.)

et donc $x_{S(n)+1} \rightarrow f(y)$ et par le même

raisonnement, $d(f(y), z) = l$ ~~et~~

Mais c'est impossible car ~~et~~

$$l = d(y, z) > d(f(y), z) = l$$

Donc $l = 0$.

(Son rempla : ~~et~~ $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$
pour $0 < \alpha < 1$ fixé.

$\leadsto x_n \rightarrow z$ géométrique et α

$$d(x_n, z) \leq \alpha^n d(x_0, z).)$$