

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ d'où $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -3y'' + 4y \end{pmatrix}$

d'où Y est solution de

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} Y$$

↙ on cherche à diagonaliser cette matrice pour pouvoir calculer
solution) $Y = e^{tA}$

• Poly. caract.
$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X+2)^2(X-1)$$

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 4 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = 0$$

 ↑
 à faire

• Valeurs propres : -2 de multiplicité 2
 1 de 1

• Sous-espaces propres :

• • -2 : Solutions de $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

↪ dim. 1 (non diagonalisable)

vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \nearrow \nearrow$ $7v_2 = v_1 - 2v_2$

On cherche v_2 tel que $(7 + 2I)v_2 = v_1$

on trouve $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ bloc $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$

•• 1 : $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pose $P = (v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

or on a $7 = PJP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On veut calculer $e^{t7} = e^{P(tJ)P^{-1}} = P e^{tJ} P^{-1}$

On a $e^{tJ} = \sum_{n \geq 0} \frac{(tJ)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n J^n}{n!}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$

Montrer que $\forall n \geq 0$ $J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & \frac{n(-2)^{n-1}}{1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $n = 0$ $J^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• hyp. de recurrence : $J^n = \begin{pmatrix} (-2) & n(-2) & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J \cdot J^n$$

$$J^n J$$

$$-2n(-2)^{n-1} + (-2)^n = n(-2)^n + (-2)^n = (n+1)(-2)^n$$

et
$$e^{tJ} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n J^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n (-2)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n (-2)^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

et
$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n (-2)^n}{n!} = e^{-2t}$$

⊗
$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n n (-2)^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n (-2)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= t \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1} (-2)^{n-1}}{(n-1)!} = t \sum_{m \geq 0} \frac{t^m (-2)^m}{m!} = t e^{-2t}$$

On a

$$y = e^{tA} y_0 = P e^{tJ} P^{-1} y_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} t e^{2t} + \frac{1}{9} e^{-2t} + \frac{8}{9} e^t & \frac{1}{9} t e^{-2t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

(Note: The first row of the matrix in the image contains a typo: the second term should be $\frac{1}{9} e^{-2t}$ instead of $\frac{1}{9} e^{-2t}$ as written. The third term is $\frac{8}{9} e^t$.)

On trouve

$$y(t) = \frac{1}{9} (2t e^{-2t} + e^{-2t} + 8e^t) \mu_1 + \frac{1}{9} t e^{-2t} \mu_2 - \frac{1}{9} (t e^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^t) \mu_3$$