

Ex $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$
 avec $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot f(x) < 0 \quad y_0 > 0$

$$(*) \quad \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Unique solution maximale: $CL : y: J \rightarrow \mathbb{R}$

2. Montrer que $t \mapsto y(t)^2$ décroissante sur J

Notons $z(t) = y(t)^2$. On a $z'(t) = 2y'(t)y(t)$
 $= 2f(y(t)) \cdot y(t)$

• 1^{er} cas : $y(t) = 0$ alors $z'(t) = 0$

• 2^e cas : $y(t) \neq 0$ alors $z'(t) = 2y(t) \cdot f(y(t)) < 0$
 par hyp.

Donc z est décroissante

3. Montrer $[0; +\infty[\subseteq J$ or il existe $l \geq 0$ tel que

$$\lim_{\infty} y^2 = l.$$

On sait déjà que $0 \in J$. Supposons que $J =]\alpha; \beta[$

avec β fini (note: on a $\alpha < 0$). Par le th. d'explosion

le temps fini: $\lim_{\substack{t \rightarrow \beta \\ t < \beta}} |y(t)| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \beta^-} z(t) = +\infty$

mais c'est impossible car z est décroissante et
donc $\forall t > 0, z(t) \leq z(0)$. Donc β est infini
et $[0; +\infty[\subseteq J$.

La fonction z est décroissante et minorée par 0
donc $\lim_{\infty} z(t) = l$.

il existe $l \geq 0$ tel que

4. On suppose que $l > 0$.

(a) Montrer $\forall t \geq 0, y(t) > 0$ et $\lim_{\infty} y = \sqrt{l}$

Supposons il existe $t_1 \geq 0$ avec $y(t_1) \leq 0$

On sait que $y(0) = y_0 > 0$ donc il existe $t_0 \in]0; t_1]$

tel que $y(t_0) = 0$ donc $z(t_0) = 0$ d'où $\forall t \geq t_0$

$z(t) = 0$ (puisque $z \geq 0$ et décroissante), $\lim_{\infty} z = 0 \Rightarrow l = 0$
contradiction

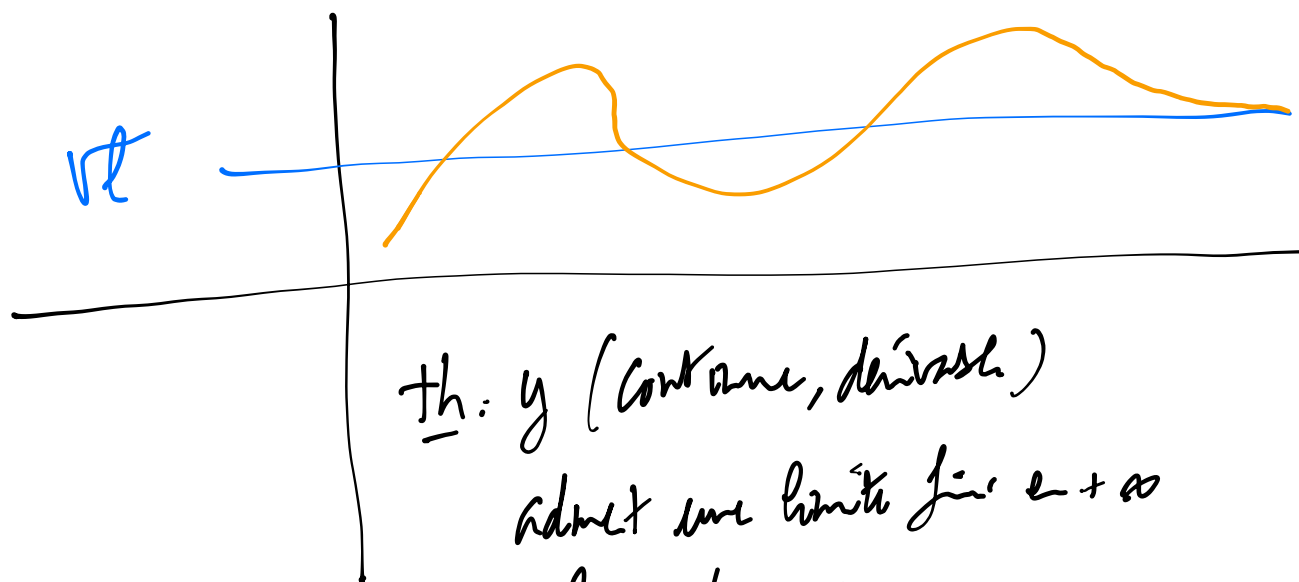
Donc on a $\forall t \geq 0, y(t) > 0$ et donc

$$y(t) = \sqrt{z(t)} = \sqrt{y^2(t)} = |y(t)|$$

$$\text{d'où } \lim_{\infty} y = \lim_{\infty} \sqrt{z} = \sqrt{\lim_{\infty} z} = \sqrt{l}$$

(b) En déduire y' a une limite en $+\infty$ et que $f(\sqrt{l}) = 0$

$$\text{On a } \lim_{\infty} y' = \lim_{\infty} f(y) = f(\lim_{\infty} y) = f(\sqrt{l})$$



th: y (continue, dérivable)

admet une limite finie en $+\infty$

$$\text{alors } y' \rightarrow 0$$

Preuve: Par le théorème des accroissements finis:

pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in [n; n+1[$ tel que
 $y(n+1) - y(n) = y'(c_n)$

donc $y'(c_n) \rightarrow 0$ puisque $y(n+1) \xrightarrow{\infty} \sqrt{l}$
 $y(n) \xrightarrow{\infty} \sqrt{l}$

et comme on sait que y' admet une limite en $+\infty$
on a bien $\lim_{\infty} y' = 0$.

(c) Conclure. Si $l > 0$

$$\text{On a } \lim_{\infty} y' = f(\sqrt{l}) = 0$$

et $\forall \ell f(\ell) < 0$ donc contradiction

puisque $\sqrt{l} \neq 0$

donc $l = 0$

(5) Supposons $\alpha > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R} \quad x f(x) \leq -\alpha x^2$

Montrer $\forall t \geq 0, y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$ $\hookrightarrow f(x) \leq -\alpha x$
 $x > 0$

On utilise le lemme de Gronwall

$$y(t) = \int_0^t y'(t) dt + y_0 = y_0 + \int_0^t f(y(t)) dt$$

$$\leq y_0 + \int_0^t -\alpha y(t) dt$$

Gronwall
 $\leadsto$

$$y(t) \leq y_0 e^{\int_0^t -\alpha ds}$$

$$= y_0 e^{-\alpha t}$$

car $y(t) > 0$
pour $t \geq 0$