

Ex

$$\textcircled{*} \begin{cases} y' = -\frac{1}{t}y^2 + \frac{2}{t}y & t \in]0; +\infty[\\ y(1) = 4 \end{cases}$$

1. Unique solution maximale : $y : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$
ouvert

Th de CL puisque $f(t, y) = -\frac{1}{t}y^2 + \frac{2}{t}y$

est C^1 sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$

2. Montrer $y(t) \neq 0 \forall t \in \mathcal{I}$

Supposons $\exists t_1 \in \mathcal{I}$ tel que $y(t_1) = 0$

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'_0 = -\frac{1}{t}y_0^2 + \frac{2}{t}y_0 & t \in \mathcal{I} \\ y_0(t_1) = 0 \end{cases}$$

Il admet une unique solution maximale (par CL)

mais y est solution et $y_0 = 0$ aussi!

Donc y est la fonction nulle mais c'est impossible
car $y(1) = 4 \quad (1 \in \mathcal{I})$

3. On pose $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ $t \in J$

Montrer $z' = -\frac{2}{t}z + \frac{1}{t}$ $t \in J$ **(**)** ← car y solution de (*)

On calcule $z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{y^2} \left(-\frac{1}{t}y^2 + \frac{2}{t}y \right)$

$$= \frac{1}{t} - \frac{2}{t} \frac{1}{y} = -\frac{2}{t}z + \frac{1}{t}$$

4. Solutions maximales de **(**)** $z(1) = \frac{1}{y(1)} = \frac{1}{4}$

Formule de Duhamel

$$z(t) = \frac{1}{4} e^{\int_1^t -\frac{2}{s} ds} + \int_1^t e^{\int_s^t -\frac{2}{\sigma} d\sigma} \frac{1}{s} ds$$

$$= \frac{1}{4} e^{-2 \ln t} + \int_1^t e^{-2(\ln t - \ln s)} \frac{1}{s} ds$$

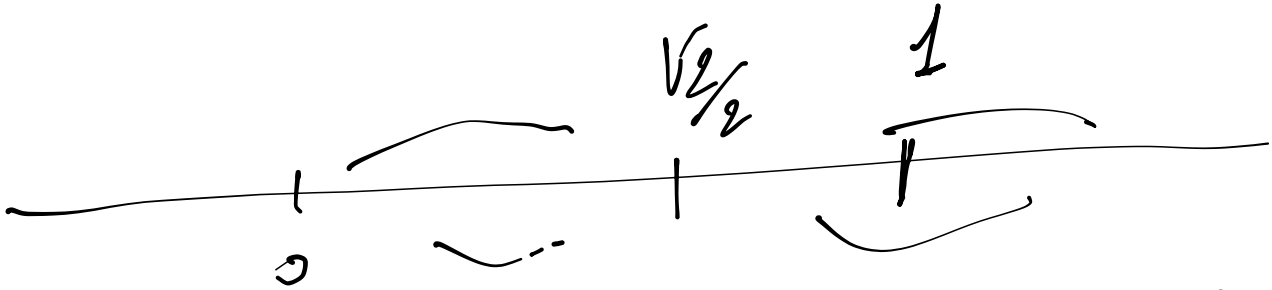
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \int_1^t s ds = \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4t^2} = \frac{2t^2 - 1}{4t^2} \quad t > 0$$

5. Déduire J et solution y

On a $y(t) = \frac{1}{2}z(t)$ pour $t \in J$

et $z(t) = 0$ si $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



On a $J =]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ et $y(t) = \frac{4t^2}{2t^2 - 1}$