

## Calcul de normes

$$1. \phi: \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \phi(u) = \int_0^1 x u(x) dx$$

$\uparrow$   
norme usuelle

$$\|\phi\|_{\|\cdot\|_\infty, |\cdot|} = \|\phi\|_\infty$$

• On majore  $\|\phi\|_\infty$ . On sait que c'est le plus petit  $M > 0$  tel que  $\forall u, |\phi(u)| \leq M \cdot \|u\|_\infty$

$$\text{On a } |\phi(u)| = \left| \int_0^1 x u(x) dx \right| \leq \int_0^1 x |u(x)| dx \leq \|u\|_\infty \int_0^1 x dx$$

$$|\phi(u)| \leq \|u\|_\infty \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \|u\|_\infty$$

donc  $\|\phi\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ .

On cherche  $u$  telle que  $|\phi(u)| = \frac{1}{2} \|u\|_\infty$

$$\text{Par } u = c \quad \phi(u) = \int_0^1 x c dx = \frac{1}{2} c \quad \|u\|_\infty = c$$

$$\text{donc } \|\phi\|_\infty = \frac{1}{2}$$

Prop  $\|\phi\|_{1,1,1} = \|\phi\|_1 : \quad \|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)| dx$

$$|\phi(u)| = \left| \int_0^1 x u(x) dx \right| \leq \int_0^1 x |u(x)| dx$$

$\leq |u(x)|$

$$\leq \int_0^1 |u(x)| dx = \|u\|_1$$

d'au  $\|\phi\|_1 \leq 1$

$u=c \quad |\phi(u)| = \frac{1}{2} c \quad \|u\|_1 = c \quad \frac{1}{2}$

$u=x \quad |\phi(u)| = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \|u\|_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$

$u=x^n \quad |\phi(u)| = \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$

$$\|u\|_1 = \int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1} dx$$

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \| \phi \|_1 \quad \forall n \geq 1$$

c'est un sup

$$\text{donc } 1 \leq \| \phi \|_1$$

$$\text{donc } \| \phi \|_1 = 1$$

$$2. \quad \psi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sur } \mathbb{R}[x]$$

$$\psi(P) = P'(0)$$

$$\| P \| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$$

On considère  $P_n(x) = (x-1)^n$   $n \geq 1$

$$P_n'(x) = n(x-1)^{n-1}$$

$$|\psi(P_n)| = |P_n'(0)| = n$$

$$\| P_n \| = \sup_{x \in [0,1]} |(x-1)^n| = 1$$

On cherche  $n \notin \forall P, |\psi(P)| \leq n \cdot \|P\|$

mais  $n$  n'existe pas :  $|\psi(p_n)| < 1$ ,  $\|p_n\| = 1$

$p_n$  de norme subordonnée car  $\psi$  n'est pas

continue