

R distance usuelle : $d(x, y) = |x - y|$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. On pose $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$

Montrer que δ est une distance :

① $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

② $\delta(x, y) = \delta(y, x) \leftarrow \text{OK}$

③ $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z) \leftarrow \text{OK}$

$\Rightarrow \boxed{\Leftarrow}$ clair

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\delta(x, y) = 0$ donc $f(x) = f(y)$

• Si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ or donc $f(y) = x$

Alors nécessairement $y \in \mathbb{Q}$ car $f(y) = \begin{cases} y \\ 1-y \end{cases}$ donc $y = x \in \mathbb{Q}$
 $y = 1-x \notin \mathbb{Q}$

donc $f(y) = y$ or on a bien $x = y$

• Si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 1-x$ or donc $f(y) = 1-x \dots$

$y \notin \mathbb{Q} \dots f(y) = 1-y$ donc $x = y$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n}$ pour δ / d_q : distance usuelle $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 1$ pour δ

En effet $\delta\left(\frac{\sqrt{2}}{n}, 1\right) = \left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) - f(1)\right|$
 $= \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{n} - 1\right| = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$