

$$E = C([0;1], \mathbb{R}) \quad A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

1. A fermé pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$

Soit (f_n) suite d'éléments de A qui converge, on montre
que $\lim f_n \in A$. Notons $f = \lim f_n$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \underline{\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon}$$

or donc,

$$\forall x \in [0;1], |f(x) - f_n(x)| \leq \|\cdot\|_\infty \leq \varepsilon$$

En particulier, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N$

$$|f(0) - f_n(0)| \leq \varepsilon \text{ et } f_n(0) = 0 \quad \forall n$$

$$\text{donc } \forall \varepsilon > 0, |f(0)| \leq \varepsilon \Rightarrow f(0) = 0$$

donc $f \in A$ et A est fermé.

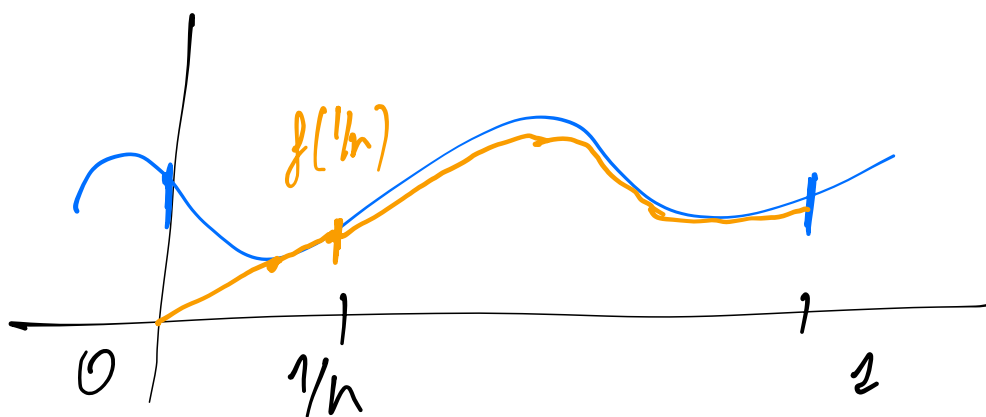
$$2. f \in E \quad f_n(x) = \begin{cases} f(1/n) \cdot n \cdot x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ f(x) & \text{si } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

$$2.1 \quad f_n(1/n) = f(1/n) \cdot n \cdot 1/n = f(1/n)$$

or $\lim_{\substack{x \rightarrow 1/n \\ 1/n < x}} f(x) = f(1/n)$ donc f_n est continue

$$\text{or } f_n(0) = f(1/n) \cdot n \cdot 0 = 0$$

$$\text{donc } f_n \in A$$



2.2 Soit $n \geq 1$, on calcule

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^{1/n} \dots + \int_{1/n}^1 \dots$$

$$= \int_0^{1/n} |f(1/n) \cdot n \cdot x - f(x)| dx$$

$$\leq |f(1/n)| \cdot n \int_0^{1/n} x dx + \int_0^{1/n} |f(x)| dx$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_0^{1/n} 1 dx + \int_0^{1/n} \|f\|_\infty dx$$

$$\leq \|f\|_{\infty} \cdot n \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2}_{\frac{n}{2} \times \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n} \|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \frac{3}{2n}$$

3. A dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$: $\forall f \in E$, il existe (f_n)
 $A = E$ d'éléments de A qui converge vers f

On prend (f_n) de la question 2, on a bien $\forall n, f_n \in A$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n} \|f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{donc } f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$$

Rq: A n'est pas fermé
 pour $\|\cdot\|_1$

4. Calculer $\overset{\circ}{A}$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$

On montre que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Soit $f \in \overset{\circ}{A}$, donc il
 existe $r > 0$ tel que $B_{\infty}(f, r) \subseteq \overset{\circ}{A} \subseteq A$. On peut gée
 définie par $g(x) = f(x) + r/2$.

Alors $\|f - g\|_\infty = r/2 < r$ donc $g \in B_\infty(f, r)$

mais $g(0) = r/2 \neq 0$ donc $g \notin A$ Contradiction

Donc $\overset{\circ}{A}$ (pour $\|\cdot\|_\infty$) est vide.

De même A (pour $\|\cdot\|_2$) est vide