

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 0} x(n)^2 < +\infty\}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n \geq 0} x(n)^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x(n)|$$

1. Normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ (normes)

$$0 \quad \|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0 : \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x(n)| \text{ donc } \|x\|_\infty = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 0, |x(n)| \leq \delta \Leftrightarrow \forall n \geq 0, x(n) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\textcircled{2} \lambda \in \mathbb{R}; \quad \|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty : \quad \|\lambda x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |\lambda x(n)| =$$

$$|\lambda| \cdot \sup_{n \geq 0} |x(n)| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$$

$$\textcircled{3} \forall x, y, \quad \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x(n) + y(n)| \leq \sup_{n \geq 0} (|x(n)| + |y(n)|)$$

$$\leq \sup_{n \geq 0} |x(n)| + \sup_{n \geq 0} |y(n)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\textcircled{3}$ Est-ce que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes?

Considérons $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $x_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $x_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{On a } \|x_k\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_k(n)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^k 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{k+1}$$

(or donc $x_k \in \ell_2(\mathbb{R})$)

$$\text{mais } \|x_k\|_{\infty} = 1$$

Pour que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ soient équivalents, il faut
exister $m, n > 0$ tels que $\forall x \quad m \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq n \|x\|_{\infty}$

$$\text{Mais } \forall n > 0, \text{ on a } \|x_k\|_2 > n = n \|x_k\|_{\infty}$$

$$\text{pour } k \geq n^2$$

Donc $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalents

$$\underline{\text{Q2}} \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{R}), \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2$$

$$\hookrightarrow \sum x(n)^2 < +\infty$$

On a $x(n) \rightarrow 0$ donc la suite $(|x(n)|)$ est
bornée donc $\|x\|_{\infty}$ est une borne atteinte, d'où

$$\|x\|_\infty = |x(N)| \text{ or done}$$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} x(n)^2 = x(N)^2 + \underbrace{\sum_{n \neq N} x(n)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq x(N)^2 = \|x\|_\infty^2$$

$$\text{donc } \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$$