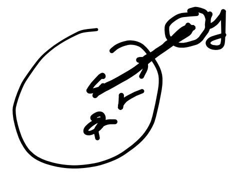
(X,d) espace métrique

$B(x,r)$ boule ouverte, $B_f(x,r)$ boule fermée

1. Montrer que $B_f(x,r)$ est fermé $\overset{"}{=} \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$

On montre que $\complement_X B_f(x,r)$ est ouvert
$\overset{"}{=} X \setminus B_f(x,r)$



On a $X \setminus B_f(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) > r\}$

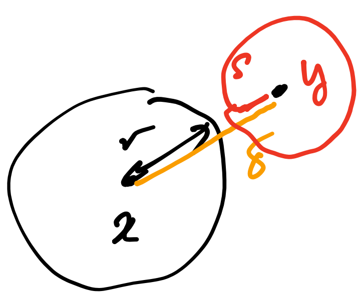
C'est un ouvert si $\forall y \in X \setminus B_f(x,r)$, il existe $s > 0$ tel que $B(y,s) \subseteq X \setminus B_f(x,r)$.

On prend $y \in X \setminus B_f(x,r)$. Notons $\delta = d(x,y) > r$.

On pose $s = \frac{\delta - r}{2}$. Alors $B(y,s) \subseteq X \setminus B_f(x,r)$.

En effet, soit $z \in B(y,s)$. On doit montrer que $d(x,z) > r$. On sait

$$d(x,z) \geq |d(x,y) - d(z,y)|$$
$$\geq |d(x,y)| - |d(z,y)|$$
$$\geq \underbrace{\delta - s}_{} > r$$
$$\delta - \frac{\delta - r}{2} = \frac{2\delta - \delta + r}{2}$$



$= \frac{\delta + r}{2} > r$

car $\delta > r$

2. Montrer $\overline{B(x,r)} \subseteq Bf(x,r)$ et $Bf(x,r)^\circ \subseteq B(x,r)$

On a $B(x,r) \subseteq Bf(x,r)$ d'où $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{Bf(x,r)}$

et $\overline{Bf(x,r)} = Bf(x,r)$ d'où le résultat.

Idem pour le deuxième résultat.

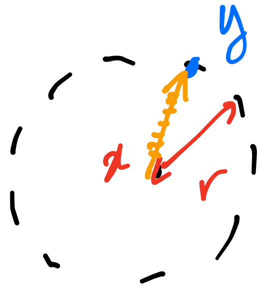
3. X evn (espace vectoriel normé) de norme $\|\cdot\|$

Montrer que $\overline{B(x,r)} = Bf(x,r)$ et $Bf(x,r)^\circ = B(x,r)$.

Pour le premier point, il reste à montrer que $Bf(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$

C'est-à-dire $\forall y \in Bf(x,r)$, il existe une suite (u_n) d'éléments de $B(x,r)$ qui converge vers y.

On considère $z = y - x$



et on pose $u_n = x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) z$

On a bien $\lim_{\infty} u_n = x + z = y$

et on vérifie que $d(x, u_n) = \|u_n - x\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|z\|$
$\leq r$

donc $\forall n \geq 1$, $d(x, u_n) < r$ et $u_n \in B(x, r)$

4. Exemple pour lequel ③ est faux

$E = \{x, y\}$ d distance discrète :
$d(x,x) = d(y,y) = 0$
$d(x,y) = 1$

$B(x,1) = \{x\}$ $\quad Bf(x,1) = \{x,y\}$

et $\boxed{\overline{B(x,1)} = \{x\}}$ donc $\overline{B(x,1)} \neq Bf(x,1)$