

$$(E) \quad y' = ay + f \quad t \in I \quad a, f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues}$$

$$1. t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma) d\sigma} f(s) ds \right)$$

Montrer y solution de (E)

$$\text{On écrit } y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(y_0 + e^{\int_{t_0}^t a(\sigma) d\sigma} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma) d\sigma} f(s) ds \right)$$

puis

$$y'(t) = a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \cdot y_0 + a(t) e^{\int_{t_0}^t a(\sigma) d\sigma} \int_{t_0}^t \dots$$

$$+ e^{\int_{t_0}^t a(\sigma) d\sigma} \cdot e^{\int_{t_0}^t a(\sigma) d\sigma} f(t)$$

$$= a(t) \underbrace{\left[e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} y_0 + e^{\int_{t_0}^t a(\sigma) d\sigma} \int_{t_0}^t \dots \right]}_{y(t)} \cdot f(t)$$

donc c'est bien une solution.

2. Méthode de variation de la constante

• Équation homogène : $y_0'(t) = a(t) y_0(t)$

de solution $C e^{\int_{t_0}^+ a(s) ds}$ avec $C \in \mathbb{R}$

On pose $y(t) = C(t) e^{\int_{t_0}^+ a(s) ds}$

avec $C(t)$ à déterminer. On dérive

$$y'(t) = C'(t) e^{\int_{t_0}^+ a(s) ds} + C(t) a(t) e^{\int_{t_0}^+ a(s) ds}$$

et on remplace ... $C'(t) = e^{-\int_{t_0}^+ a(s) ds} f(t)$

$$\text{donc } C(t) = \int_{t_0}^+ e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} f(\sigma) d\sigma + K$$

$K \in \mathbb{R}$

Pour avoir une solution y vérifiant $y(t_0) = y_0$

on résout et on trouve $K = y_0$

3. Solution maximale de

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{t^2} = -\frac{1}{t^3} & I =]0; +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y' = -\frac{1}{t^2}y - \frac{1}{t^3} \quad a(t) = -\frac{1}{t^2} \quad f(t) = -\frac{1}{t^3}$$

Solution : $y(t) = e^{\int_1^t -\frac{1}{s^2} ds} \left(y_0 = t_0 = 1 \right) + \int_1^t e^{\int_s^t -\frac{1}{\sigma^2} d\sigma} \cdot \frac{-1}{s^3} ds$

$$y(t) = e^{\frac{1}{t}-1} + \int_1^t e^{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} \times \frac{-1}{s^3} ds$$

$$= e^{\frac{1}{t}-1} - e^{\frac{1}{t}} \int_1^t \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2} ds$$

IPP $\int_1^t \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2} ds = \left[\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s} \right]_1^t + \int_1^t \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2} ds$

$$= e^{-\frac{1}{t}} - e^{-1} + \left[\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s} \right]_1^t$$

$$= e^{-1/t}/t + e^{-1/t} - 2e^{-1}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{1/t-1} - e^{1/t} \left(\downarrow \right) = \dots = 3e^{1/t-1} - \frac{1}{t} - 1$$

solution globale

Vérification partielle: $y(1) = 3e^{1-1} - 1 - 1 = 1$