

Exo. Fonction Γ d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n! \\ \forall x \neq -n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{array} \right.$$

1. $\forall x, y > 0$, montrer $t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0;1[$

Problèmes possibles : t proche de 0 quand $x-1 < 0$
 t proche de 1 quand $y-1 < 0$

mais par comparaison avec fonctions dérivées : OK

On pose $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$
fonction Bêta d'Euler

2. On pose $I = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} ds dt$

Calculer avec chgt de variables : $u=t$ or $v=t+s$

On pose $\Phi: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow V$ définie par

$$\Phi(t,s) = (t, t+s). \text{ On a } V = \{(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : v > u\}$$

Φ est un C^1 -diffeo. sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: • dér : dérivées partielles existent et continues

• bijectif : $\Phi^{-1}(u,v) = (u, v-u)$

• $\det J_\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$V = \{(u,v) : u > 0 \text{ et } v > u\}$

Par chgt de variables :

positif + mesurable

$$I = \int_{\overline{v}} u^{x-1} (v-u)^{y-1} e^{-v} du dv$$

(Tonelli)

$$= \int_{[0;+\infty[} \left(\int_{[0;v]} u^{x-1} (v-u)^{y-1} e^{-v} du \right) dv$$

$$= \int_{[0;+\infty[} e^{-v} \left(\int_0^{v(1-u/v)} u^{x-1} \left(\frac{v-u}{v} \right)^{y-1} du \right) dv$$

$$= \int_{[0; +\infty[} e^{-v} v^{y-1} \left[\int_{[0; v]} u^{x-1} \left(1 - \frac{u}{v}\right)^{y-1} du \right] dv$$

On considère $\Phi : [0, v] \rightarrow [0, 1]$ (pour $v > 0$ fixé)
 $u \mapsto u/v$ propos
 $w = u/v$

Φ C^1 -diffé, $J_\Phi(v) = 1/v$

donc $\rightarrow = \int_{[0; 1]} (wv)^{x-1} (1-w)^{y-1} \frac{1}{v} dw$

$$= v^x \int_{[0; 1]} w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw$$

comme sur la feuille

$$= v^x \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw = v^x B(x, y)$$

donc
$$I = \int_{0;+\infty} e^{-v} v^{y-1} v^x B(x,y) dv$$

$$= B(x,y) \int_{0;+\infty} e^{-v} v^{(x+y)-1} dv$$

$$= B(x,y) \Gamma(x+y)$$

$\hookrightarrow$ continue, non copié
 $\Gamma(x+y) < +\infty$

3. Calculer I d'une autre manière

$$I = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} ds dt$$

Tonelli

$$= \int_{0;+\infty} \left(\int_{0;+\infty} t^{x-1} e^{-t} \cdot s^{y-1} e^{-s} ds \right) dt$$

$\hookrightarrow \Gamma(x)$ $\hookrightarrow \Gamma(y)$

$$= \Gamma(x) \Gamma(y).$$

Conclusion:
$$\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y)$$

10/10/20