

Exo: μ mesure de comptage sur $[0,1]$, $\mathcal{B}([0,1])$

$$1. \Delta = \{(x, x) : x \in [0,1]\}$$

Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ de $[0,1]^2$?

On pose $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\Delta = f^{-1}(\{0\}) \cap [0,1]^2$
 $(x, y) \mapsto x - y$

f mesurable car continue et $\{0\}$ borélien donc

$f^{-1}(\{0\})$ borélien et comme $[0,1]^2$ est aussi un borélien
donc Δ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et aussi de $[0,1]^2$

puisque $\Delta \subseteq [0,1]^2$

2. Justifier l'existence et calculer

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

• Pour I_1 , soit $y \in [0,1]$ on a

$$\int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x,y) d\lambda(x) = \int_{\{y\}} d\lambda(x) = \lambda(\{y\}) = 0$$

puisque $\chi_{\Delta}(x,y) = 1$ si $x=y$ et 0 sinon

donc I_1 existe et $I_1 = 0$.

• Pour I_2 on a
$$\int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x,y) d\mu(y) = \mu(\{x\}) = 1$$

donc I_2 existe et $I_2 = 1$

Conclusion: $I_1 \neq I_2$ et Tonelli ne s'applique pas.

Raison: μ n'est pas σ -finie

$[0,1]$ n'est pas union dénombrable d'ensembles finies.