Ex. $\varepsilon > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$ conditionnement pour $\|\cdot\|_\infty$

$$A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ $\|A\|_\infty = \max(2, 2+\varepsilon) = 2+\varepsilon$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon}\max(2+\varepsilon, 2) = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

assez grand

$$\text{donc } \operatorname{cond}_\infty(A) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} = \frac{4}{\varepsilon} + \varepsilon + 4 \gg 1$$

Si ε proche de 0 alors $\frac{4}{\varepsilon}$ est grand

Donc le système $Ax = b$ est toujours plus stable

Ex. Calculer $\operatorname{Cond}_2(A)$ pour la norme $|||\cdot|||_2$

Exercice : $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. Valeurs propres de A

$\lambda_1 = 1+2a$ multiplicité 1

$\lambda_2 = 1 - a$ multiplicité 2

2. A symétrique : vrai $\forall a \in \mathbb{R}$

A définie positive : ssi valeurs propres sont > 0

ssi $1+2a > 0 \iff a > -\frac{1}{2}$

$1 - a > 0 \iff a < 1$

ssi $a \in]-1/2 \,;\, 1[$

3. On décompose $\quad D \quad L \quad U$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M = D = I_n \qquad N = L+U = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{L_J} = M^{-1}N = D^{-1}(D-A) = I_n - D^{-1}A$$

$= N$

Méthode de Jacobi converge ssi $\rho(N) < 1$

et on calcule les valeurs propres de N

- v vecteur propre de A. de valeur propre λ

On a $N = I - A$ d'où $Nv = Iv - Av = v - \lambda v$
$= (1-\lambda) v$

donc $1-\lambda$ valeur propre de N (avec même mult.)

donc les vp de N sont $1-(1+2a) = -2a$
$1-(1-a) = a$

donc $\rho(L_J) = 2|a|$ et la méthode converge ssi $|a| < 1/2$

4. GS

$$M = D - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \quad N = U = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{GS} = M^{-1} N = (D-L)^{-1}((D-L)-A)$$
$$= I_n - (D-L)^{-1} A$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & a^2 & a(a-1) \\ 0 & a^2(1-a) & -a^2(a+2) \end{pmatrix}$$

5. On admet : pour $0 < a < 4$, les vp de L_{GS} sont $0, \lambda, \bar{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = a^{3/2}$

Convergence de Gauss-Seidel $\Leftrightarrow \rho(L_{GS}) < 1$
(pour $0 < a < 4$)

$\Leftrightarrow a^{3/2} < 1$

$\Leftrightarrow a < 1$

Supposons $0 < a < 1/2$, alors la méthode la plus rapide est GS car $a^{3/2} < 2a$

a proche de $1/2$ $\qquad a^{3/2} \simeq 0,35$

$2a \simeq 1$