

Exc. Cholesky

1. Symétrique ok

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

↓ forme quadr.

$$\langle x, Ax \rangle = \dots = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (3x_2 + 2x_3)^2 + (4x_3)^2$$

↑ réduction de Gauss

signature (3, 0)

↳ définie positive

2. $A = LL^t$

$$\langle x, Ax \rangle = x^t L L^t x = (L^t x)^t L^t x$$

$$\langle x, Ax \rangle = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & 3x_2 + 2x_3 & 4x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^t x$$

L L^t

3. Résoudre

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix} = b$$

$$A = LL^t$$

$$LL^t x = b \Leftrightarrow L^t x = L^{-1} b$$

↑
facile à
calculer

$$\text{On trouve } L^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

donc il faut résoudre

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\text{d'où } x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$