

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{K}^n$

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$, montrer $\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$

Puisque A est inversible, il existe $y \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = A^{-1}y$ (i.e. $y = Ax$). On applique l'inégalité

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{avec } A \leftarrow A^{-1} \\ x \leftarrow y$$

$$\|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y\|$$

"

$$\|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$$

$$\text{d'où } \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|Ax\|.$$

2. $E \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\|E\| < 1/\|A^{-1}\|$

montrer
 $\forall x \in \mathbb{K}^n, \|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\| \right) \cdot \|x\|$

$$\text{On a } \|A^{-1}E\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|E\| < 1$$

d'où pour $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, $\|A^{-1}Ex\| < \|x\|$

On écrit $Ax + Ex = (A+E)x = \underbrace{A}_{A} \underbrace{(\mathbb{I} + A^{-1}E)}_x x$
 or par la question précédente

$$\|Ax + Ex\| \geq \frac{\|(\mathbb{I} + A^{-1}E)x\| (= \|x + A^{-1}Ex\|)}{\|A^{-1}\|}$$

$$\geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}Ex\|}{\|A^{-1}\|}$$

norme
sub.

$$\geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}E\| \cdot \|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

norme
matricielle

$$\geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}\| \cdot \|E\| \cdot \|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\| \right) \cdot \|x\|$$

Puisque $\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0, \|(A+E)x\| > 0$$

$$\text{d'ou } (A+E)x \neq 0$$

or donc $A+E$ est inversible

$$3. \text{ Cas } A = I_n, \text{ on a } \|A^{-1}\| = \|I_n\| = 1$$

donc si $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|E\| < 1$

alors $I_n + E$ est inversible