

# Topologie des espaces métriques

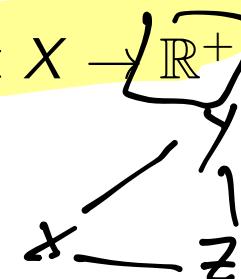
1. Espaces métriques
2. Fonctions continues
3. Compacité
4. Connexité
5. Complétude

# §1.1 Topologie – Espaces métriques

## Définition

Une **distance** sur un ensemble  $X$  est une fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

1. (séparation)  $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0$  ssi  $x = y$
2. (symétrie)  $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
3. (inégalité triangulaire)  $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$



$(X, d)$  est un **espace métrique**

## Définition

Une **norme** sur un **espace vectoriel**  $X$  (sur  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ ) est une fonction  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

1. (séparation)  $\forall x \in X, \|x\| = 0$  ssi  $x = 0$
2. (homogénéité)  $\forall x \in X, \forall \lambda, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. (inégalité triangulaire)  $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \| \cdot \|)$  est un **espace normé**

Résultat. Soit  $(X, d)$  espace métrique,

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

## Théorème

Soit  $(X, \|\cdot\|)$  espace normé alors  $d(x, y) = \|x - y\|$  est une distance sur  $X$

## Exemples

1.  $\mathbb{R}^n$  avec la norme euclidienne  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. La distance discrète sur tout ensemble  $X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Définition

Deux distances  $d_1$  et  $d_2$  sur  $X$  sont Lipschitz-équivalentes s'il existe  $m, M > 0$  tels que

$$\forall x, y \in X, \quad m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y)$$

## Définition

Soit  $(X, d)$  espace métrique. Pour  $x \in X$  et  $r \geq 0$ , on pose

$$\overline{\mathcal{B}} = \begin{cases} B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} & \text{(boule ouverte)} \\ B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} & \text{(boule fermée)} \end{cases}$$

Une partie  $A$  de  $X$  est **bornée** si il existe  $M \geq 0$  tel que  $\forall a, a' \in A$ ,  $d(a, a') \leq M$ , c'est équivalent à demander que  $A$  est contenue dans une boule. Pour  $A \subseteq X$ , une partie bornée, on définit son **diamètre** par

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

## Proposition

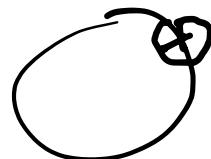
Soit  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  espaces métriques. Alors on peut définir les deux distances suivantes sur  $X \times Y$

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

La distance  $d_\infty$  est la **distance produit**

**Résultat.** Ces deux distances sont Lipschitz-équivalentes  $\leftarrow$  Exo.



30, 1

## Définition

Une partie  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est un **ouvert** si, pour tout  $a \in A$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subseteq A$ . Le complémentaire d'un ouvert est un **fermé**.

**Résultat.** Une boule ouverte est un **ouvert** et une boule fermée est un **fermé**.

## Théorème

Si  $d_1$  et  $d_2$  sont Lipschitz-équivalentes sur  $X$  alors les ouverts de  $(X, d_1)$  sont exactement les ouverts de  $(X, d_2)$ .

## Théorème

La famille des ouverts de  $(X, d)$  vérifie les propriétés suivantes :

1. Toute **union (arbitraire)** d'ouverts est un **ouvert**
2. Toute **intersection finie** d'ouverts est un **ouvert**

(Un énoncé équivalent en découle pour les fermés)

$\bigcap_{i \in I} F_i$  fermé  
 $\bigcup_{i \in I} F_i$  fermé

## Définition

La **topologie** d'un espace métrique  $(X, d)$  est l'ensemble des ouverts de  $X$ . Si  $A$  est une partie de  $X$ , la **topologie induite** est celle donnée par la restriction de  $d$  à  $A \times A$ .

Si  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont des espaces métriques, la **topologie produit** de  $X \times Y$  est celle donnée par la distance  $d_\infty$  (max. entre  $d_X$  et  $d_Y$ )

Ouverts de  $A = \{ \bar{U} \cap A, U \text{ ouvert } \}$

base de  $\mathbb{R}$ :  $\{ B_{a, b} \mid a < b \}$

## Définition

Une **base de la topologie** de  $(X, d)$  est un ensemble  $\mathcal{B}$  de parties de  $X$  telles que : tout élément de  $\mathcal{B}$  est ouvert et tout ouvert (non vide) de  $X$  est **union** (arbitraire) d'éléments de  $\mathcal{B}$

**Résultat.** Les boules ouvertes forment une base de la topologie de  $(X, d)$

Ouvert de  $X$ :  $\forall x \in U, \exists B_x$  ouverte contenant  $x$   
et  $B_x \subseteq U$

## Définition

Un espace métrique est **séparable** s'il admet une base de topologie au plus dénombrable

donc  $U = \bigcup_{x \in U} B_x$

## Définition

Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments d'un espace métrique  $(X, d)$ . On dit  $(x_n)$  converge vers  $\ell \in X$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, d(x_n, \ell) \leq \epsilon$$

Résultat. La limite, si elle existe, est unique

← Exo.

## Définition

Une suite extraite d'une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  est une suite de la forme  $(x_{f(n)})$  où  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante (et donc  $\forall n, f(n) \geq n$ ).

$$f(\ell) > f(1) > f(0) \Rightarrow f(\ell) \geq 2$$

## Théorème

Toute suite de réels admet une sous-suite monotone.

## Définition

Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments d'un espace métrique  $(X, d)$ . On dit que  $x \in X$  est valeur d'adhérence de  $(x_n)$  si, pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $N \geq 0$ ,  $\exists n \geq N$  avec  $x_n \in B(x, \epsilon)$ . C'est équivalent à dire qu'il existe une sous-suite extraite de  $(x_n)$  qui converge vers  $x$ .

Résultat  
 $0 \leq a \leq b$

$\forall \epsilon > 0,$

$a \leq \epsilon \Rightarrow$

$a = 0$

•  $\exists x$

## Théorème

Une partie  $A$  de l'espace métrique  $X$  est ouverte ssi pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers un élément de  $A$ ,  $\exists N \geq 0$  tel que  $\forall n \geq N$ , on a  $x_n \in A$

## Théorème

Une partie  $A$  de l'espace métrique  $X$  est fermée ssi pour toute suite  $(x_n)$  convergente d'éléments de  $A$ , la limite est dans  $A$

## Définition

Soit  $A$  une partie de l'espace métrique  $X$ . L'intérieur de  $A$ , noté  $A^\circ$ , est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . L'adhérence de  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est le plus petit fermé contenant  $A$ .  $A$  est dense dans  $X$  si  $\bar{A} = X$ . La frontière de  $A$ , noté  $\delta A$ , est  $\delta A = \bar{A} \setminus A^\circ$

**Résultat.** On a  $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ ;  $A^\circ = A$  ssi  $A$  est ouvert;  $\bar{A} = A$  ssi  $A$  est fermé.

## Théorème

On a  $x \in \bar{A}$  ssi  $\forall U$  ouvert contenant  $x$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$  ssi il existe une suite d'éléments de  $A$  convergeant vers  $x$

## Boules ouvertes, boules fermées

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Soient  $x \in X$  et  $r$  un réel strictement positif. On note  $B(x, r)$  (resp.  $B_f(x, r)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

1. Montrer que la boule fermée  $B_f(x, r)$  est un fermé de  $X$ .
2. Montrer que l'adhérence de  $B(x, r)$  est incluse dans  $B_f(x, r)$  et que l'intérieur de  $B_f(x, r)$  contient  $B(x, r)$ .
3. On suppose dans cette question que  $X$  est un espace vectoriel normé, muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . Montrer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
4. Donner un exemple d'un espace métrique  $(X, d)$  pour lequel les résultats de la question 3. sont faux.

## Définition

Pour  $p \in [1, +\infty[$ , on définit la **norme**  $\|\cdot\|_p$  sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

et la **norme**  $\|\cdot\|_\infty$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

**Résultat.** L'inégalité triangulaire pour ces normes est l'**inégalité de Minkowski**

## Théorème

Soient  $p, q \in [1, +\infty]$ . Les normes  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|_q$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire il existe  $m, M > 0$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, m \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq M \|x\|_p$$

et donc les distances correspondantes sont Lipschitz-équivalentes

## Normes sur $\ell^2$

On note

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 < \infty \right\}$$

et pour  $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ , on pose

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|.$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_{\infty}$  sont des normes sur  $\ell^2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ ,  $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2$ .
3. Les normes  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $\|\cdot\|_2$  sont-elles équivalentes ?

(Indication. considérer la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\ell^2(\mathbb{R})$  définie par :  $x_k(n) = 1$  si  $n \leq k$  et  $x_k(n) = 0$  sinon.)

## Normes sur $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$

On note  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  et  $A = \{f \in E : f(0) = 0\}$ . On rappelle la définition des normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sur  $E$  :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} \|f(x)\|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

1. Montrer que  $A$  est une partie fermée de  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .
2. Soit  $f \in E$ . On définit pour tout  $n \geq 1$ ,

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(1/n) nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 2.1 Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n \in A$ .

- 2.2 Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n} \|f\|_\infty.$$

3. Montrer que  $A$  est dense dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ .
4. Déterminer l'intérieur de  $A$  pour  $\|\cdot\|_\infty$  puis pour  $\|\cdot\|_1$ .

## §1.2 Fonctions continues

### Définition

Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est **continue en  $x \in X$**  si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que

$$\forall x' \in X, d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

$f$  est **continue sur  $A \subseteq X$**  si  $f$  est continue en  $x$  pour tout  $x \in A$

$f$  est **uniformément continue sur  $A \subseteq X$**  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in A, d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

### Remarque

*Définition de continuité :  $\delta = \delta_{x, \epsilon}$*

*Définition de continuité uniforme :  $\delta = \delta_\epsilon$*

### Définition

Soit  $K > 0$ . Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est  **$K$ -lipschitzienne** si

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x')$$

**Résultat.** Lipschitzienne  $\implies$  uniformément continue  $\implies$  continue

## Théorème (Autre caractérisation de la continuité)

Soit  $f : X \rightarrow Y$ .

- ▶  $f$  est continue en  $x \in X$  ssi pour tout suite  $(x_n)$  suite d'éléments de  $X$  de limite  $x$ , on a  $\lim_n f(x_n) = f(x)$  (caractérisation séquentielle)
- ▶  $f$  est continue sur  $X$  ssi pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , on a  $f^{-1}(U)$  ouvert de  $X$  (caractérisation topologique)

Remarque. vérifier pour  $U$  dans une base d'ouverts de  $Y$  est suffisant

**Résultat.** La composée, la somme, la multiplication de fonctions continues est continue

**Résultat.** Deux fonctions continues qui coïncident sur un ensemble dense sont égales

## Théorème

Soit  $f : X \rightarrow Y \times Z$  (avec la distance  $d_\infty$ ). On note  $f = (f_Y, f_Z)$ . Alors  $f$  est continue ssi  $f_Y$  et  $f_Z$  sont continues

## Définition

Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $a \in \bar{A}$  et  $b \in B$ . On dit que  $f$  tend vers  $b$  quand  $x$  tend vers  $a$  ou la **limite** de  $f$  en  $a$  est  $b$ , noté  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), b) < \epsilon$$

**Résultat.** On a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  ssi  $\lim_n f(x_n) = b$  pour tout suite  $(x_n)$  de limite  $a$  avec  $x_n \neq a \ \forall n$

**Résultat.**  $f$  est continue en  $a$  ssi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

## Théorème (Prolongement par continuité)

Soit  $A \subseteq X$  et  $f : A \rightarrow Y$ . Soit  $c \in \bar{A} \setminus A$  tel que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe. On définit  $g : A \cup \{c\} \rightarrow Y$  par

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A \quad \text{et} \quad g(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x).$$

Alors,  $g$  est continue en  $c$ .

## Définition

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  vers  $Y$  et soit  $f : X \rightarrow Y$ .

- ▶  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  si  $\forall x \in X, \lim_n f_n(x) = f(x)$ , ie  
 $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0$  tel que  $\forall n \geq N, d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$

- ▶  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  si

$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0$  tel que  $\forall x \in X, \forall n \geq N, d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$

## Théorème

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues de  $X$  vers  $Y$  qui converge uniformément vers  $f : X \rightarrow Y$ . Alors,  $f$  est continue.

## Théorème

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application linéaire entre deux evn (espaces vectoriels normés) alors  $f$  est continue ssi  $f$  est continue en 0 ssi  $f$  est lipschitzienne ssi  $\exists M > 0, \forall x \in X, \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ .

Dans ce cas, le plus petit  $M$  qui convient est la **norme subordonnée** de  $f$ , dénotée  $\|f\|$ .

## Théorème

Soit  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$  ( $=$  ensemble des applications linéaires continues), on a

- ▶  $\forall x \in X, \|f(x)\|_Y \leq \|f\| \cdot \|x\|_X$



$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|f(x)\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|f(x)\|_Y$$

- ▶ Soit  $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$ , on a  $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$

Résultat.  $\mathcal{L}(X, Y)$  avec la norme  $\|\cdot\|$  est un evn

## Définition

Un **homéomorphisme** entre deux espaces métriques  $f : X \rightarrow Y$  est une bijection telle que  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues. Dans ce cas, on dit que  $X$  et  $Y$  sont **homéomorphes**.

## Limite pour une distance particulière

Soit  $d$  la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$  :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Montrer que l'application  $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

est une distance sur  $\mathbb{R}$ .

2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $\left( \frac{\sqrt{2}}{n} \right)_{n \geq 1}$  pour cette distance.

## Calcul de normes d'applications linéaires.

1. On considère l'application linéaire  $\phi : \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\phi(u) = \int_0^1 x u(x) dx.$$

Calculer la norme de  $\phi$  pour  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Même question avec la norme  $\|\cdot\|_1$ .

2. On considère l'application linéaire  $\psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\psi(P) = P'(0).$$

Calculer la norme de  $\psi$  pour  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme  
 $\|P\| = \sup_{x \in [0; 1]} |P(x)|$ .

## §1.3 Compacité

### Définition

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

- ▶ **Propriété de Borel-Lebesgue.** Soit  $(U_i)_{i \in I}$  des ouverts de  $X$  tels que  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$  (recouvrement d'ouverts), il existe  $I_0 \subseteq I$  fini tel que  $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$ .
- ▶ **Propriété de Bolzano-Weierstrass.** Tout suite d'éléments de  $X$  admet une sous-suite convergente.

### Théorème

*Ces deux propriétés sont équivalentes pour un espace métrique. Un espace avec ces propriétés est un **espace compact***

**Résultat.** Les compacts de  $\mathbb{R}$  sont les fermés bornés

**Résultat.** Soit  $X$  un espace compact et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement d'ouverts de  $X$ . Alors il existe  $r > 0$  tel que  $\forall x \in X, \exists i \in I$  avec  $B(x, r) \subseteq U_i$

## Proposition

- ▶ *Un sous-espace compact d'un espace métrique est fermé*
- ▶ *Une intersection arbitraire de compacts est compacte*
- ▶ *Une union finie de compacts est compacte*
- ▶ *Un fermé d'un espace compact est compact*

## Théorème

1. **Borne atteinte.** *Soit  $X$  compact et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes. De plus,  $f$  est uniformément continue (aussi vrai si on remplace  $\mathbb{R}$  par  $Y$  métrique).*
2. **Riesz.** *Soit  $E$  un evn. Alors,  $E$  est de dimension finie ssi  $B_f(0, 1)$  est compacte.*
3. **Produit de compacts.** *Le produit de deux espaces compacts avec la distance produit est un espace compact*

## Proposition

*Soit  $n \geq 1$ , alors toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  (resp. sur  $\mathbb{C}^n$ ) sont équivalentes*

## §1.4 Connexité

### Définition

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que  $X$  est **connexe** si, pour tout ouvert  $U$  et  $V$  avec  $X = U \cup V$  et  $U \cap V = \emptyset$ , on a  $(U, V) = (X, \emptyset)$  ou  $(\emptyset, X)$ .

### Proposition

- ▶  $X$  est connexessi les seuls ouverts-fermés sont  $X$  et  $\emptyset$
- ▶  $X$  est connexessi toute fonction continue  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  est constante
- ▶ *L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe*
- ▶ *Soit  $A \subseteq X$  connexe et  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$  alors  $B$  connexe*  
*En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe*
- ▶ *Le produit de deux espaces connexes est connexe*

## Théorème (Connexité dans $\mathbb{R}$ )

*Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles. En conséquence, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $I$  est un intervalle, alors  $f(I)$  est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires)*

## Définition

Soit  $x \in X$  espace métrique. La **composante connexe**  $C(x)$  de  $x$  est la réunion des connexes de  $X$  contenant  $x$ . C'est le plus grand connexe contenant  $x$ . En particulier,  $C(x)$  est fermé.

**Résultat.** On utilise : une union (arbitraire) de connexes d'intersection non vide est connexe

## Théorème

*Soient  $x, y \in X$ . Alors  $C(x) = C(y)$  ou  $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ . En particulier,  $X$  est l'union (disjoints) de composantes connexes.*

## Définition

Un **chemin** reliant  $x$  à  $y$  avec  $x, y \in X$  espace métrique est une application  $\gamma : [0; 1] \rightarrow X$  continue avec  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ . (On peut remplacer  $[0; 1]$  par un intervalle arbitraire  $[a; b]$ )

On dit que  $X$  est **connexe par arcs** si,  $\forall x, y \in X$ , il existe un chemin reliant  $x$  et  $y$

**Résultat.** Connexe par arcs  $\implies$  connexe

**Résultat.** L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs

## Application

*Les espaces  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  ne sont pas homéomorphes*

## Théorème

*L'adhérence de l'ensemble  $\{(t, \sin(1/t)) : t \in ]0; 1]\}$  est compact, connexe mais pas connexe par arcs*

## §1.5 Complétude

### Définition

Un suite  $(x_n)$  d'un espace métrique  $X$  est une **suite de Cauchy** si  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N$  tel que  $\forall n, m \geq N$ , on a  $d(x_n, x_m) < \epsilon$

On dit que  $X$  est **complet** si toute suite de Cauchy de  $X$  est convergente

**Résultat.** Suite convergente  $\implies$  suite de Cauchy

**Résultat.** Suite de Cauchy avec une sous-suite convergente est convergente (même limite)

### Théorème

- ▶ *Tout fermé d'un espace complet est complet*
- ▶ *Tout sous-espace complet est fermé*
- ▶ *Tout espace métrique compact est complet*
- ▶ *Tout evn de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est complet*

## Proposition

*L'espace  $\mathcal{L}(X, Y)$  avec  $X, Y$  evn et  $Y$  complet, munit de la norme subordonnée  $\|\cdot\|$  est complet*

## Théorème (Riesz-Fischer)

*Soit  $p \in [1; +\infty]$ . Alors  $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$  est un evn complet avec*

$$\|(u_n)\|_p = \begin{cases} \left( \sum_n |u_n|^p \right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \sup_n |u_n| & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

*et  $\ell^p(\mathbb{N}) = \{ \text{suites réelles } (u_n) \text{ avec } \|(u_n)\|_p < +\infty \}$ .*

## Théorème

*Soit  $X$  un espace métrique, il existe un unique (à isométrie près) complété  $Y$  de  $X$  vérifiant  $X \subseteq Y$ ,  $d_X$  restriction de  $d_Y$  à  $X$ ,  $Y$  complet et  $X$  dense dans  $Y$ .*

## Théorème (Prolongement des fonctions unif. continues)

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques avec  $X$  complet. Soient  $S \subseteq X$ , une partie dense de  $X$ , et  $f : S \rightarrow Y$  une application uniformément continue. Alors, il existe un unique prolongement de  $f$  par continuité de  $X$  vers  $Y$ .

Rappel Les applications linéaires continues sont uniformément continues.

## Théorème (Point fixe des applications contractantes)

Soit  $X$  un espace métrique. Une application  $f : X \rightarrow X$  est **contractante** s'il existe  $0 < \alpha < 1$  tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Supposons que  $X$  est complet et  $f : X \rightarrow X$  est contractante, alors elle admet un unique **point fixe**  $x_* \in X$  avec  $f(x_*) = x_*$ . De plus, pour tout  $x_0 \in X$ , la suite  $(x_n)$  avec  $x_{n+1} = f(x_n)$  tend vers  $x_*$  géométriquement, c'est-à-dire

$$\forall n \geq 0, \quad d(x_n, x_*) \leq \alpha^n d(x_0, x_*).$$

## Une version faible du théorème de Picard.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et soit  $f : X \rightarrow X$  une fonction telle que  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$  avec  $x \neq y$ .

1. Montrer que  $f$  admet au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe  $z \in X$  tel que  $d(z, f(z)) \leq d(x, f(x))$  pour tout  $x \in X$ .
3. Montrer que  $z$  est l'unique point fixe de  $f$ .
4. Soit  $x_0 \in X$ . On définit une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  par  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .  
Montrer que la suite  $(d(x_n, z))_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell \geq 0$
5. Montrer que  $\ell = 0$  et donc que  $(x_n)$  converge vers  $z$ .