Algèbre linéaire et bilinéaire, Analyse matricielle

1. Dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Espaces euclidiens, espaces hermitiens
4. Normes matricielles
5. Décompositions et méthodes de calcul

§1. Dualité

$\mathbb{K}$-ev

Notations. E espace-vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Une forme linéaire est application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$

$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad f(\lambda v) = \lambda f(v)$

L'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n aussi.

th du rang : $f \in \mathcal{L}(E,F)$ $\qquad \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \underbrace{\operatorname{rang} f}_{\text{déf} = \dim \operatorname{Im} f}$

Résultats.

- Une forme linéaire est nulle ou surjective.
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan (dim. $n - 1$) et la réciproque est aussi vraie.
- Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

$f \in E^*$

$\operatorname{Im} f$ sev de $\mathbb{K} \leftarrow$ ev de dim 1 $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 0 \Rightarrow f = 0$

ou $\dim \operatorname{Im} f = 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{K}$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Les applications $e_1^*, \ldots, e_n^* : E \to \mathbb{K}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$x = e_1^*(x)\, e_1 + \cdots + e_n^*(x)\, e_n$$

à montrer

sont des formes linéaires. La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.

base de E $\mathcal{B} \to \mathcal{B}^* \leftarrow$ base de E^*

$x = \sum x_i e_i$

$y = \sum y_i e_i$ $\Rightarrow x + y = \sum (x_i + y_i) e_i$

Théorème

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors, e_i^* est l'unique élément de E^* tel que, pour tout j, on a

$e_j = 0.e_1 + \cdots + 1.e_j + \cdots 0 e_n$

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Théorème

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E avec $f_i = e_i^*$, $\forall i$. On l'appelle la base antéduale de la base $(f_1, \ldots, f_n)$.

contraduale

Exercice. Calculer la base duale de la base de $\mathbb{R}^3$: $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$.