Algèbre linéaire et bilinéaire, Analyse matricielle

1. Dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Espaces euclidiens, espaces hermitiens
4. Normes matricielles
5. Décompositions et méthodes de calcul

§1. Dualité

Notations. E espace-vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Une forme linéaire est application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$

L'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n aussi.

Résultats.

- Une forme linéaire est nulle ou surjective.
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan (dim. $n - 1$) et la réciproque est aussi vraie.
- Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Les applications $e_1^*, \ldots, e_n^* : E \to \mathbb{K}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$x = e_1^*(x)\, e_1 + \cdots + e_n^*(x)\, e_n$$

sont des formes linéaires. La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.

Théorème

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors, e_i^* est l'unique élément de E^* tel que, pour tout j, on a

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Théorème

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E avec $f_i = e_i^*$, $\forall i$. On l'appelle la base antéduale de la base $(f_1, \ldots, f_n)$.

Exercice. Calculer la base duale de la base de $\mathbb{R}^3$: $(1, 1, 1),\ (1, 0, -1),\ (0, 1, 1)$.

§2. Formes bilinéaires et formes quadratiques

Forme bilinéaire : application $\phi \ : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable. L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension n^2.

Sur $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, base de E, on écrit $x = \sum_i x_i\, e_i$, et $y = \sum_i y_i\, e_i$. On a

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \phi(e_i, e_j) = X^t\, A\, Y$$

avec $A = (\phi(e_i, e_j)) \in M_n(\mathbb{K})$, matrice représentant ϕ sur la base $\mathcal{B}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base E, la matrice A' de ϕ sur la base $\mathcal{B}'$ vérifie

$$A' = P^t A P$$

avec P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Remarque. $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$. (Attention. notation !)

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique (fbs), c'est-à-dire $\forall x, y$,
$\phi(x, y) = \phi(y, x) \iff$ la matrice de ϕ (dans toute base) est symétrique.
(Aussi possible forme bilinéaire alternée ou anti-symétrique.)

Pour $x, y \in E$, on dit x et y orthogonaux, noté $x \perp_\phi y$, si $\phi(x, y) = 0$.
Si $x \perp x$, on dit x isotrope.

Pour $S \subseteq E$, on pose $S^{\perp_\phi} = \{x \in E \mid \forall y \in S, \phi(x, y) = 0\}$. C'est toujours un sev de E. En fait, pour $S^\perp = \mathrm{Vec}(S)^\perp$.

On note $\mathrm{Ker}\,\phi = E^{\perp_\phi}$, noyau de ϕ. Le rang de ϕ est $\dim E - \dim \mathrm{Ker}\,\phi$.

Lemme

Soit A matrice de ϕ dans une base, alors $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Ker}\,A$.

Théorème

Pour F sev de E, on a $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(E^\perp \cap F)$.

Si $E^\perp = \{0\}$ (non dégénérée) alors $F \oplus F^\perp = E$.

Exercice.

Soit la forme bilinéaire ϕ de $\mathbb{R}^3$ définie sur la base canonique par :

$$\phi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

1. Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique. Calculer $\operatorname{Ker}\phi$, puis son rang.
2. Écrire la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1,1,1)^t$, $v_2 = (0,1,1)^t$, $v_3 = (0,0,1)^t$.
3. Calculer l'orthogonal $v_1^{\perp}$.

Vocabulaire. Soit ϕ une fbs. On définit son rang par dim E − dim $\operatorname{Ker}\phi$. On dit que ϕ est

- positive si $\forall x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0 \quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R})$.
- négative si $\forall x \in E$, $\phi(x,x) \leq 0 \quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R})$.
- définie si $\phi(x,x) = 0 \implies x = 0$.
- non dégénérée si $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$ (et dégénérée sinon).

Lemme

Si ϕ est un fbs définie alors ϕ est non dégénérée.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\phi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

est une fbs non dégénérée et non définie.

Forme quadratique. Application de $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire ϕ sur E avec $q(x) = \phi(x, x)$ pour tout $x \in E$. Sous forme matricielle, on a

$$q(x) = X^t AX.$$

Théorème

Soit q forme quadratique, alors il existe une unique fbs ϕ telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \phi(x, x)$. On l'appelle la forme polaire de q.
Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big).$$

De plus, l'application $q \mapsto \phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev donc l'ev des formes quadratiques est isomorphe à l'ev des matrices symétriques $n \times n$.

Forme polynômiale. L'expression $q(x)$ est un polynôme quadratique homogène en les $x_1, \ldots, x_n$. On peut déduire l'expression de $\phi(x, y)$ (comme polynôme linéaire homogène en les $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$) par

$$ax_i^2 \rightsquigarrow ax_iy_i \quad \text{et} \quad ax_ix_j \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}ax_iy_j + \tfrac{1}{2}ax_jy_i \quad (i \neq j)$$

Vocabulaire. Une forme quadratique hérite de la terminologie de la fbs associée : rang, positive, négative, dégénérée, noyau, orthogonalité, etc.

Attention. $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} \phi$ et non $C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$, le cône isotrope. Il contient $\operatorname{Ker} q$ (en général, strictement).

Orthogonalité. $x \perp_q y \iff x \perp_\phi y \iff q(x+y) = q(x) + q(y)$.

Réduction des formes quadratiques. Soient q forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale,
2. La matrice de q dans $\mathcal{B}$ est diagonale,
3. L'expression de q sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$q(x) = \sum_i d_i\, f_i(x)^2$$

avec $(f_1, \ldots, f_n)$ base de E^*.

Théorème. Une telle base existe toujours.

Réduction de Gauss.

Réduire les formes quadratiques suivantes :

- $$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2.$$

- $$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4.$$

Definition. deux formes quadratiques q et q' sont congruentes s'il existe des bases dans lesquelles elles ont la même matrice. C'est une relation d'équivalence.

Classification sur $\mathbb{C}$.

Deux formes quadratiques complexes sont congruentes ssi elles ont le même rang.

Classification sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit q forme quadratique sur $\mathbb{R}$. Il existe un couple d'entiers (s, t), appelé la signature de q, tel que, dans toute base orthogonale $(e_1, \ldots e_n)$ pour q, on a

- $s = \#\{i : q(e_i) > 0\}$
- $t = \#\{i : q(e_i) < 0\}$

De plus $s + t$ est le rang de q et donc $\dim \mathrm{Ker}\, q = \#\{i : q(e_i) = 0\}$.

Corollaire. Deux formes quadratiques réelles sont congruentes ssi elles ont la même signature.

§3. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (espaces euclidiens) ou $\mathbb{C}$ (espaces hermitiens)

Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ est produit scalaire (resp. hermitien) si elle est linéaire à gauche, définie positive et

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle, \qquad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

On en déduit l'existence d'une norme : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$:

- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tous $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème (Théorème de représentation de Riesz)

Soit f une forme linéaire sur un espace euclidien E. Alors, il existe un unique vecteur $y \in E$ telle que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x, y \rangle$$

Démonstration.

Soit $\phi : E \to E^*$ définie, pour $y \in E$, par

$$\phi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle.$$

Clairement, ϕ est une application linéaire et puisque $\phi_y(y) = \|y\|^2$, elle est injective. Comme $\dim E = \dim E^*$, c'est donc un isomorphisme. $\square$

Proposition

Soit F sev de E, alors $E = F \oplus F^{\perp}$. En particulier, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Le vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F.

Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de E. Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$f_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\overline{\langle f_j, a_i \rangle}}{\|f_j\|^2} f_j \quad \textit{et} \quad e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i.$$

Alors la base $(f_1, \ldots, f_n)$ est orthogonale et la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée. De plus, pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$\mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Vec}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vec}(e_1, \ldots, e_k).$$

Corollaire

Soit $(u_1, \ldots, u_t)$ une base orthonormée de F. Alors le projeté orthogonale de x sur F est

$$\sum_{i=1}^{t} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

L'application linéaire $E \to F$ qui envoie x sur son projeté orthogonal $p_F(x)$ est appelé un projecteur orthogonal.

Méthode des moindres carrés. Soit $x \in E$, il existe un unique point $y \in F$ tel que la distance $\|x - y\|$ est minimale, c'est le projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F.

Calcul du projecteur orthogonal. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit $(u_1, \dots, u_s)$ une base orthonormée de F. Soient $U_1, \dots, U_s$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $u_1, \dots, u_s$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\sum_{i=1}^{s} U_i\, U_i^t.$$

Réciproquement, une matrice M telle que M est symétrique et $M^2 = M$ est un projecteur orthogonal.

Diagonalisation des endomorphismes normaux.

Soient E et F deux espaces euclidiens / hermitiens de dim. finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(F,E)$, appelé adjoint de u, tels que $\forall x \in E, y \in F$

$$\langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E.$$

La matrice A^* de u^* (après choix de bases) est $A^* = \overline{A}^t$ avec A matrice de u.

Une matrice A est

- hermitienne ou auto-adjointe si $A = A^*$ (= symétrique, cas réel).
- unitaire (complexe) ou orthogonale (réel) si $A^{-1} = A^*$
- (dans le cas carré) normale si $AA^* = A^*A$.

Remarque. Une matrice unitaire / orthogonale est une matrice de changement de bases entre deux bases orthonormées.

Théorème (Théorème spectral)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme est scindé dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice A est normale ssi elle est diagonalisable dans une base orthonormale ssi il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1}\,A\,U$ est diagonale.

En particulier, une matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.

Et, dans le cas complexe, A est hermitienne ssi ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Corollaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice symétrique / hermitienne. Alors A est positive (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Exercice. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de vecteur de E, espace euclidien de dimension finie, tous de norme 1. Montrez qu'on a, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2,$$

si et seulement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice. Calculer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx$$

Exercice.

1. Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.
2. Montrer que $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$ est égal à la plus grande valeur propre de sa partie symétrique.
3. Maximiser la quantité $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$ avec les contraintes
$$\begin{cases} a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}, \\ a_1^2 + \cdots + a_4^2 = 1 \end{cases}$$

Isométrie. $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|u(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$

Proposition

$u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes à u isométrie :

- $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle$
- *u transforme une base orthonormée en une base orthonormée*
- *la matrice A de u dans une base orthonormée vérifie $A^t A = \mathrm{Id}$, matrice orthogonale, pour le cas euclidien et $A^t \bar{A} = \mathrm{Id}$, matrice unitaire, pour le cas hermitien.*

Remarque. Les endomorphismes / matrices orthogonaux (resp. unitaires) forment un groupe appelé groupe orthogonal (resp. unitaire).

Théorème

Soit u endomorphisme orthogonal (cas euclidien). Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec soit ± 1, soit des rotations du plan (bloc 2×2) sur la diagonale.

Racine carrée et décomposition polaire

On considère $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien canonique.

1. *Racine carrée.* Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne et définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\langle x, Ax \rangle > 0$. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne et définie positive H telle que $A = H^2$.
   On admet que H est l'unique matrice hermitienne et définie positive H telle que $A = H^2$. On dit que H est la racine carrée positive de A.
2. *Décomposition polaire.* Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
   - 2.1 Justifier que $M^* M$ est hermitienne et définie positive. On note H sa racine carrée positive.
   - 2.2 On pose $U = H^{-1} M$. Montrer que U est une matrice unitaire.
   - 2.3 En déduire que M s'écrit de manière unique sous la forme $M = HU$ avec U unitaire et H hermitienne définie positive.

§5. Normes matricielles

Rappel. Puisque $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, toutes les normes sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est une norme matricielle si

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

Pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, la norme de Frobenius définie par

$$\|A\|_F = \Big(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 \Big)^{1/2}.$$

est une norme matricielle. C'est une conséquence de Cauchy-Schwarz.

La norme définie par $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ n'est pas une norme matricielle, mais la norme infinie définie par $\|A\|_\infty = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$ est une norme matricielle.

Pour $\|\cdot\|$ une norme fixée de $\mathbb{K}^n$, la norme subordonnée est la norme $|||\cdot|||$ de $M_n(\mathbb{K})$ définie par

$$|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Proposition

Soit une norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{K}^n$, on a

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall x \in \mathbb{K}^n\ : \|Ax\| \leq |||A||| \|x\|$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, *il existe* $x \in \mathbb{K}^n$ *avec* $|||A||| = \|Ax\|$ *et* $\|x\| \leq 1$.
3. $|||\mathbf{1}_n||| = 1$.
4. *La norme subordonnée* $|||\cdot|||$ *est une norme matricielle.*

Remarque. Puisque $\|\mathbf{1}_n\|_F \neq 1$, la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

Soit $|||\cdot|||_2$ la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$.

Propriétés.

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $|||A|||_2 = |||A^*|||_2 =$ plus grande valeur singulière de A.
2. $\forall A, U \in M_n(\mathbb{K})$ avec U unitaire, $|||AU|||_2 = |||UA|||_2 = |||A|||_2$.
3. En particulier, si A normale, $|||A|||_2 = \rho(A)$ avec $\rho(A) = \max.$ des modules des valeurs propres de A est le rayon spectral de A.

Théorème

Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

Preuve. Soient x vecteur propre de valeur propre λ et y tel que $xy^* \neq 0$. Alors, on a $\|Axy^*\| = \|(Ax)y^*\| = |\lambda|\|xy^*\|$ et $\|Axy^*\| \leq \|A\| \, \|xy^*\|$.

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle. On a

$$\lim_k \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

Norme et inversibilité.

Soit $A \in \mathrm{GL_n}(K)$. On note $\| \cdot \|$ une norme sur K^n et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée.

1. Montrer que pour tout $x \in K^n$, on a $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$.
2. Soit $E \in M_n(K)$ une matrice telle que $|||E||| < \frac{1}{|||A^{-1}|||}$. Montrer que pour tout $x \in K^n$, on a

$$\|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E||| \right) \|x\|.$$

   En déduire que $A + E$ est inversible.
3. Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si $A = I_n$?

§4. Décompositions

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A admet une décomposition LU s'il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U avec des 1 sur la diagonale telles que $A = LU$.

Théorème

Supposons A inversible. Alors il existe une matrice de permutations P telle que PA admet une unique décomposition LU.

Si A est symétrique définie positive, alors A admet une unique décomposition LU.

Utilisations. résolution de systèmes linéaires avec membres de droite différents, inversion de matrices, calculs de déterminants, etc.

Méthode. On fait un pivot de Gauss pour mettre sous forme triangulaire supérieure (en mettant le pivot égal à 1 à chaque fois). Les transformations effectuées donnent la matrice L. Si un pivot est nul, on échange les lignes pour avoir un pivot non nul (ce qui donne P). Coût cubique.

Théorème

Soit matrice A symétrique et définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire inférieure L avec des coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = LL^t$. C'est la décomposition de Cholesky.

Exercice. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est symétrique et définie positive.
2. Calculer la factorisation de Cholesky de A.
3. Résoudre $Ax = b$ avec $b = (0, 0, 96)^t$ en utilisant la deuxième question.

Une matrice A admet une décomposition QU (ou QR) s'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = QU$.

Particulièrement utile quand A est rectangle pour calculer le pseudo-inverse de A :

$$AX = Y \iff UX = {}^{t}QY$$

Méthode. On fait la méthode de Gramm-Schmidt sur les colonnes a_j de A. La base orthonormée (e_i) obtenue donne la matrice Q. La matrice R a pour entrées $\langle e_i, a_j \rangle$ pour $i \leq j$ (et zéro ailleurs).

Remarques. La méthode est plus couteuse que la méthode LU et susceptible aux problèmes d'arrondis dans Gramm-Schmidt.

C'est la base de la méthode QR pour le calcul (d'approximations) des valeurs propres.

Exercice.

- Calculer la décomposition LU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer la décomposition QU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Lemme

Soit A un matrice (non nécessairement carrée). Alors, la matrice A^*A est hermitienne positive. En particulier, ses valeurs propres sont des réels positifs. On appelle valeurs singulières de A les racines carrées des valeurs propres de A^*A.

Remarque. si A est déjà hermitienne, on obtient les modules de ses valeurs propres.

Décomposition en valeurs singulières. Supposons que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ admette r valeurs singulières non nulles $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_r$. Alors, il existe deux matrices unitaires $U \in M_n(\mathbb{K})$ et $V \in M_m(\mathbb{K})$ telles que

$$A = V\hat{D}U^* \text{ avec } \hat{D} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

avec $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r)$.

Conditionnement

On considère $Ax = b$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, et on s'intéresse à la sensibilité de la solution x quand on perturbe b.

Le conditionnement de A (relativement à une norme matricielle subordonnée) est défini par

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \geq 1.$$

La matrice A est bien conditionnée si $\mathrm{cond}(A)$ est proche de 1.

Résultat. Soit $b + \Delta b$ une perturbation de b donnant la solution $x + \Delta x$. On a

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Proposition

Pour la norme $|||\cdot|||_2$, *on a* $\mathrm{cond}(A) = \sigma_{\max}(A)/\sigma_{\min}(A)$ *où* $\sigma_{\max}$ *(resp.* $\sigma_{\min}$*) est la plus grande (resp. plus petite) valeur singulière de A. En particulier, si A est normale, on a* $\mathrm{cond}(A) = \rho(A)\,\rho(A^{-1})$ *et si A est unitaire* $\mathrm{cond}(A) = 1$.

Remarque. La norme choisie influence la valeur du conditionnement, mais pas sur sa nature car toutes les normes sont équivalentes sur $M_n(\mathbb{R})$.

Méthodes itératives.

On cherche à résoudre $Ax = b$ avec A non nécessairement inversible. On écrit $A = M - N$ avec M inversible d'où l'équation équivalente $Mx = Nx + b$.

Théorème

Soit x_0 arbitraire, on définit une suite $(x_n)_n$ par

$$x_{n+1} = M^{-1}N\,x_n + M^{-1}b.$$

Alors (x_n) tends vers une solution ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Décomposition. $A = D - L - U$ avec D diagonale, L triangulaire inférieure stricte et U triangulaire supérieure stricte.

- Méthode de Jacobi. $M = D$ et $N = L + U$.
- Méthode de Gauss-Seidel. $M = D - L$ et $N = U$.

Exercice. Soit $\epsilon > 0$. Calculer $\mathrm{cond}(A)$ pour la norme infinie.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\epsilon \end{pmatrix}.$$

Que peut-on en déduire sur la stabilité du système $Ax = b$?

Comparaison des méthodes itératives Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice M est-elle symétrique définie positive ?
3. Écrire la matrice d'itération L_J de Jacobi. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
4. Ecrire la matrice d'itération L_{GS} de Gauss-Seidel.
5. On admet que, pour $0 < a < 4$, les valeurs propres de L_{GS} sont $0, \lambda, \bar{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = \sqrt{a^3}$. Comparer les vitesses de convergence pour $a \in]0; 1/2[$.