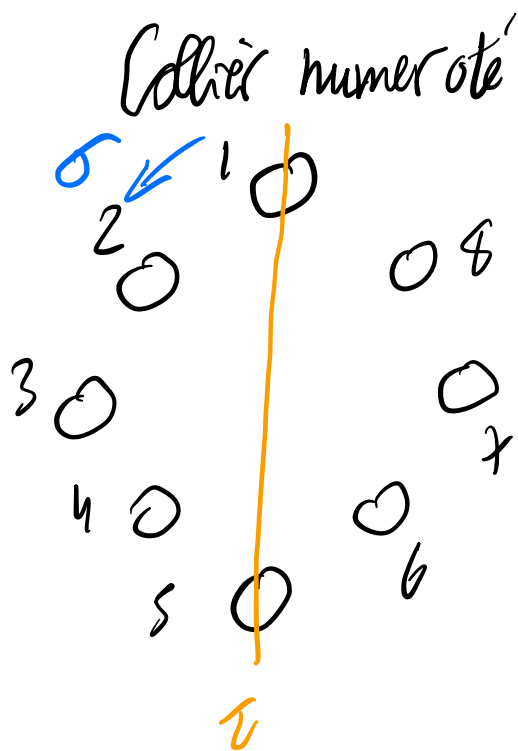


Application de la formule de Burnside

Compter le nombre de colliers de 8 perles avec 5 blanches et 3 noires.

Idee: on considère les colliers numérotés et on fait agir le groupe des transformations qui stabilisent (globalement) un collier.



Groupe stabilisant
= groupe fixant un
polygone régulier à 8
côtés $= D_{16} = \langle \sigma, \tau \rangle$

Par la formule de Burnside :

$$\text{nbr de colliers} = \frac{1}{16} \sum_{g \in D_{16}} N_g \quad \text{où } N_g \text{ compte}$$

le nombre de colliers numérotés fixés par g .

$$D_{16} = \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^7, \tau, \tau\sigma, \dots, \tau\sigma^7\}$$

- $g = e$: tous les colliers numérotés sont fixés
 $\leadsto$ on choisit l'emplacement des 5 perles blanches et
 les autres sont noires : 5 parmi 8 sans ordre $\binom{8}{5} = 56$
 colliers

- $g = \sigma$: dans un collier fixé par g , toutes les
 perles sont de même couleur : $\emptyset$ collier

De même pour σ^3, σ^5 et σ^7 (ordre 8)

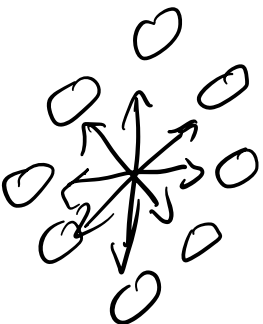
- $g = \sigma^2$: dans un collier fixé par g , il
 y a deux groupes de 4 perles de même couleur : $\emptyset$ collier

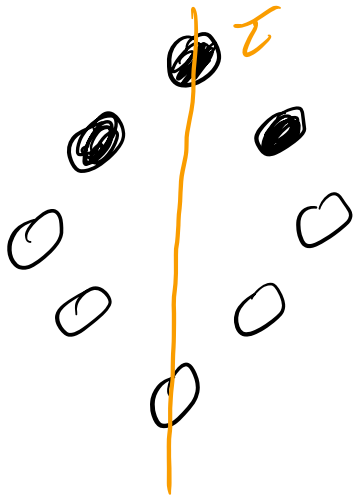
De même pour σ^6 (ordre 4)

- $g = \sigma^4$: dans un collier fixé par g , le
 nombre de perles d'une même couleur est pair

$\emptyset$ collier

- $g = \tau$: les colliers fixés par g ,
 sont de la forme suivante :





- perle noire en haut ou en bas : 2 choix
- position des deux autres perles noires : 3 choix

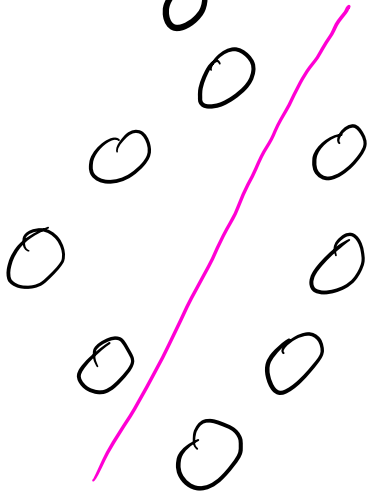
6 colliers,

(idem pour $\tau\sigma^2, \tau\sigma^4$ et $\tau\sigma^6$)

- $g = \tau\sigma$: le nombre de perle de même couleur dans un collier fixé

est pair : 0 collier

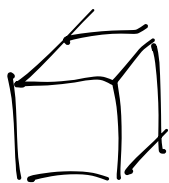
(idem pour $\tau^3\sigma, \tau^5\sigma$ et $\tau^7\sigma$)



$\tau\sigma$

Conclusion: le nombre de colliers est

$$\frac{1}{16} (86 + 6 + 6 + 6 + 6) = 5$$



3 S
B on R