Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques générales

Topologie des espaces métriques. Examen. Durée 2h. Décembre 2025

Partie A : à composer sur la copie N.1

Exercice 1.

1. On considère **R**, muni de sa distance usuelle. Justifier que **R** privé d'un point n'est pas connexe.
2. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension ≥ 2 (éventuellement infinie).
   (a) Soit a et b deux vecteurs non colinéaires de E. Expliciter un arc de a à b ne passant pas par 0_E.
   (b) En déduire que $(E\backslash\{0_E\}, \|\cdot\|)$ est connexe par arcs.
   (c) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas homéomorphe à **R**.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $B\colon E \times E \to E$ une application bilinéaire et continue. On rappelle qu'alors (par le critère de continuité des applications bilinéaires) :

$$\exists\, C_0 > 0,\ \forall\, x, y \in E\colon\ \|B(x,y)\| \leq C_0\|x\|\,\|y\|\,.$$

Soit $a \in E$ tel que

$$\|a\| < \frac{1}{4C_0}.$$

1. Justifier l'identité $B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}\big[B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y)\big]$.
2. En déduire que, quel que soit $r \geq 0$, l'application $\phi\colon E \to E$, définie par $\phi(x) = a + B(x,x)$ est $(2C_0 r)$-lipschitzienne sur la boule $D_r := \{x \in E\colon \|x\| \leq r\}$.
3. Résoudre l'inégalité $C_0 r^2 - r + \|a\| \leq 0$. Trouver ensuite $0 \leq r_1 < r_2$ tels que $\forall\, r \in [r_1, r_2]$ on a
$$\|x\| \leq r \quad \Longrightarrow \quad \|a + B(x,x)\| \leq r.$$
4. On note ϕ_r la restriction de ϕ à D_r. Trouver $r \geq 0$ tel que $\phi_r(D_r) \subset D_r$ et ϕ_r soit contractante.
5. En déduire que l'équation
$$x = a + B(x,x)$$
possède (au moins) une solution dans E.

Fin de la partie A. Partie B au verso.

Partie B : à composer sur la copie N.2

Question de cours. Démontrer que toute partie compacte d'un espace métrique est fermée.

Exercice 3. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$. Le graphe de f est l'ensemble $G = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \colon x \in [0,1]\}$. On munit G de la métrique euclidienne induite de $\mathbf{R}^2$.

1. Démontrer que si f est continue sur $[0,1]$, alors G est compact et connexe.
2. On considère l'ensemble $C = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$. Démontrer que si f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0,1]$ et que $(0, f(0)) \in \overline{C}$, alors G est connexe.
3. En déduire un exemple d'une fonction discontinue dont le graphe est connexe.
4. Démontrer que si G est compact, alors f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 4. Soit $E = C([0,1], \mathbf{R})$. Soit $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $h(0) = 0$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $0 < x \leq 1$. On pose

$$X := E + \mathrm{Vect}(h)$$

et, pour tout $g \in X$,

$$\|g\|_1 := \int_0^1 |g| \qquad \text{(l'intégrale de Riemann impropre de } |g| \text{ sur } [0,1]\text{).}$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1$ définit une norme sur X.
2. Soit $f_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, la fonction définie par

   $$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}}, \quad \text{où } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbf{N}^*.$$

   Démontrer que $\|f_n - h\|_1 \to 0$.
3. En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

Fin de la partie B.