Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918

Topologie des espaces métriques. Examen. Durée 2h. Décembre 2025

Partie A : à composer sur la copie N.1

Exercice 1.

1. On considère $\mathbf{R}$, muni de sa distance usuelle. Justifier que $\mathbf{R}$ privé d'un point n'est pas connexe.
2. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension ≥ 2 (éventuellement infinie).
   (a) Soit a et b deux vecteurs non colinéaires de E. Expliciter un arc de a à b ne passant pas par 0_E.
   (b) En déduire que $(E\backslash\{0_E\}, \|\cdot\|)$ est connexe par arcs.
   (c) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $B\colon E \times E \to E$ une application bilinéaire et continue. On rappelle qu'alors (par le critère de continuité des applications bilinéaires) :

$$\exists\, C_0 > 0,\ \forall\, x, y \in E\colon\ \|B(x,y)\| \leq C_0\|x\|\,\|y\|\,.$$

Soit $a \in E$ tel que

$$\|a\| < \frac{1}{4C_0}.$$

1. Justifier l'identité $B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}\big[B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y)\big]$.
2. En déduire que, quel que soit $r \geq 0$, l'application $\phi\colon E \to E$, définie par $\phi(x) = a + B(x,x)$ est $(2C_0 r)$-lipschitzienne sur la boule $D_r := \{x \in E\colon \|x\| \leq r\}$.
3. Résoudre l'inégalité $C_0 r^2 - r + \|a\| \leq 0$. Trouver ensuite $0 \leq r_1 < r_2$ tels que $\forall\, r \in [r_1, r_2]$ on a
$$\|x\| \leq r \quad \Longrightarrow \quad \|a + B(x,x)\| \leq r.$$
4. On note ϕ_r la restriction de ϕ à D_r. Trouver $r \geq 0$ tel que $\phi_r(D_r) \subset D_r$ et ϕ_r soit contractante.
5. En déduire que l'équation
$$x = a + B(x,x)$$
possède (au moins) une solution dans E.

Fin de la partie A. Partie B au verso.

Partie B : à composer sur la copie N.2

Question de cours. Démontrer que toute partie compacte d'un espace métrique est fermée.

Exercice 3. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$. Le graphe de f est l'ensemble $G = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \colon x \in [0,1]\}$. On munit G de la métrique euclidienne induite de $\mathbf{R}^2$.

1. Démontrer que si f est continue sur $[0,1]$, alors G est compact et connexe.
2. On considère l'ensemble $C = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$. Démontrer que si f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0,1]$ et que $(0, f(0)) \in \overline{C}$, alors G est connexe.
3. En déduire un exemple d'une fonction discontinue dont le graphe est connexe.
4. Démontrer que si G est compact, alors f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 4. Soit $E = C([0,1], \mathbf{R})$. Soit $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $h(0) = 0$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $0 < x \leq 1$. On pose

$$X := E + \mathrm{Vect}(h)$$

et, pour tout $g \in X$,

$$\|g\|_1 := \int_0^1 |g| \qquad \text{(l'intégrale de Riemann impropre de } |g| \text{ sur } [0,1]).$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1$ définit une norme sur X.
2. Soit $f_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, la fonction définie par

   $$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}}, \quad \text{où } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbf{N}^*.$$

   Démontrer que $\|f_n - h\|_1 \to 0$.
3. En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

Fin de la partie B.

Corrigé

Solution de l'exercice 1.

1. Les seuls connexes de **R** sont les intervalles. Donc **R** privé d'un point n'est pas connexe.
2. (a) Si a et b ne sont pas colinéaires, le segment $[a,b] = \{(1-t)a + tb\colon 0 \leq t \leq 1\}$ ne contient pas l'origine (sinon, on trouverait t_0, $0 \leq t_0 \leq 1$, tel que $(1-t_0)a + t_0 b = 0_E$ et a et b serait colinéaires). Ce segment fournit un arc de a à b inclus dans $E\backslash\{0\}$.

   (b) Soit $x, y \in E\backslash\{0\}$. Montrons que $x \sim y$ (c'est-à dire, qu'il existe un arc de x à y inclus dans $E\backslash\{0\}$. Par la question précédente, il suffit de considérer le cas où x et y sont colinéaires. On trouve $z \in E\backslash\{0\}$ tel que $z \notin \text{Vect}(x) = \text{Vect}(y)$. Par la première question, $x \sim z$, $z \sim y$. Par transitivité, $x \sim y$.

   (c) Si par contradiction il existe $\phi\colon E \to \mathbf{R}$ homéomorphisme, alors la restriction de ϕ à $E\backslash\{0_E\}$ serait un homéomorphisme de $E\backslash\{0_E\}$ dans $\mathbf{R}\backslash\{\phi(0_E)\}$. C'est impossible puisque $E\backslash\{0_E\}$ est connexe et $\mathbf{R}\backslash\{\phi(0_E)\}$ ne l'est pas.

Solution de l'exercice 2.

1. On observe que $B(x-y, x+y) = B(x,x) + B(x,y) - B(y,x) - B(y,y)$ et $B(x+y, x-y) = B(x,x) - B(x,y) + B(y,x) - B(y,y)$ et il suffit ensuite de sommer terme-à-terme ces deux identités.
2. Pour tout $x, y \in D_r$,

   $$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \frac{1}{2}\Big(\|B(x-y, x+y)\| + \|B(x+y, x-y)\|\Big) \leq C_0\|x+y\|\ \|x-y\| \leq 2C_0 r\|x-y\|.$$

   La fonction ϕ est donc $2C_0r$-lipschitzienne sur la boule D_r.
3. Considérons le discriminant $\Delta = 1 - 4C_0\|a\|$. On a $\Delta > 0$ par l'hypothèse, donc $C_0r^2 - r + \|a\| \leq 0$ si et seulement si $r_1 \leq r \leq r_2$, avec $r_1 = \frac{1}{2C_0}(1-\sqrt{\Delta})$ et $r_2 = \frac{1}{2C_0}(1+\sqrt{\Delta})$. Mais alors, si $r \in [r_1, r_2]$ et $\|x\| \leq r$, on obtient $\|a + B(x,x)\| \leq \|a\| + C_0r^2 \leq r$.
4. La condition $2C_0r < 1$ assure que ϕ soit contractante sur D_r et la condition $r \in [r_1, r_2]$ assure que $\phi(D_r) \subset D_r$. Le choix $r = r_1$ (qui est > 0 si $a \neq 0_E$ et égal à 0 si $a = 0_E$) remplit ces deux conditions. Donc $\phi_{r_1}\colon D_{r_1} \to D_{r_1}$ est une contraction.
5. On a D_{r_1} fermé dans E, qui est complet. Donc D_{r_1} est complet. Appliquons le théorème des contractions : Il existe un et un seul point fixe $\bar{x} \in D_{r_1}$ tel que

   $$\bar{x} = \phi(\bar{x}) = a + B(\bar{x}, \bar{x}).$$

   Cette solution est unique dans D_{r_1}, mais il pourrait y avoir d'autres solutions de l'équation $x = a + B(x,x)$ dans $E\backslash\{D_{r_1}\}$.

Solution de l'exercice 3

1. Soit $I\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ l'application identité, qui est continue. Si f est continue, l'application $(I, f)\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ est continue. On a $G = (I, f)([0,1])$. Autrement dit, G est l'image par cette application du compact et connexe $[0,1]$. Donc G est compact et connexe.
2. Si f est continue sur $]0,1]$, alors C est connexe, puisque C est l'image par (I, f) du connexe $]0,1]$. Si $(0, f(0)) \in \overline{C}$, alors $C \subset G \subset \overline{C}$ et donc G est connexe.
3. La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0,1]$ vérifie les conditions de la question précédente. (Observons que $(0,0) = \lim_{k\to+\infty}(\frac{1}{k\pi}, f(\frac{1}{k\pi}))$ est bien dans l'adhérence de C). De plus cette fonction est discontinue.
4. Supposons G compact. Si, par contradiction, f est discontinue en un point $a \in [0,1]$, alors on peut trouver $\epsilon > 0$ et une suite (x_n) de $[0,1]$, telle que $x_n \to a$ et $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Considérons la suite $((x_n, f(x_n))$. Par compacité de G, il existe une sous-suite convergente $((x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ vers un point $(\alpha, f(\alpha)) \in G$. Alors $x_{n_k} \to \alpha$, donc $\alpha = a$ par unicité de la limite, et $f(x_{n_k}) \to f(a)$. Pour k assez grand, $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \epsilon$. Absurde.

Solution de l'exercice 4.

1. Observons que $\|\cdot\|_1$ est bien définie sur X, puisque l'intégrale de Riemann impropre de h converge et si $g := f + \lambda h$ (avec $f \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors l'intégrale impropre de g converge absolument par comparaison.

   Si $g = f + \lambda h \in X$, avec $f \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, et si $\|g\|_1 = 0$, alors pour tout $0 < \delta \leq 1$, $\int_\delta^1 |g| = 0$ et g est continue sur $[\delta, 1]$ donc $g \equiv 0$ sur $[\delta, 1]$. Donc g s'annule sur $]0,1]$. En particulier, en calculant $0 = \lim_{x\to0+} g(x)$ on trouve $\lambda = 0$ et ensuite $f \equiv 0$ par la continuité de f en 0. Donc $g = 0_X$.

   Si $g = f + \lambda h \in X$ avec $f \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ et si $\mu \in \mathbf{R}$, alors
   $\|\mu g\|_1 = \int_0^1 |\mu f + \mu\lambda h| = |\mu| \int_0^1 |f + \lambda h| = |\mu|\,\|g\|_1$.

   De plus, si $g_1 = f_1 + \lambda_1 h$ et $g_2 = f_2 + \lambda_2 h$, avec $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, on a
   $\|g_1 + g_2\|_1 \leq \int_0^1 \big(|f_1 + \lambda_1 h| + |f_2 + \lambda_2 h|\big) \leq \|g_1\|_1 + \|g_2\|_1$.
2. On a

$$\|f_n - h\|_1 = \int_0^1 |f_n - h| = \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}}\Big)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{nx + \sqrt{x}} \to 0$$

   La convergence vers zéro de la suite d'intégrales précédente (qui serait immédiate à établir si on connait le théorème de convergence dominée) peut se démontrer ainsi : on fixe $0 < \epsilon \leq 1$ et on cherche $\delta > 0$ tel que $\int_0^\delta \frac{dx}{nx+\sqrt{x}} \leq \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{\epsilon}{2}$. Ensuite $|\int_\delta^1 \frac{dx}{nx+\sqrt{x}}| \leq \int_\delta^1 \frac{dx}{n\delta+\sqrt{\delta}} \leq \frac{1-\delta}{n\delta} \to 0$. Ici $\delta = \epsilon/4$ convient. Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|\int_0^1 \frac{dx}{nx+\sqrt{x}}| < \epsilon$. (Une démonstration alternative consisterait à effectuer le changement de variable $u = \sqrt{x}$).
3. On a $f_n \to h$ dans $(X, \|\cdot\|_1)$. Donc la suite (f_n) est de Cauchy dans X, et aussi dans E, puisque $(f_n) \subset E$. Mais $h \notin E$ et donc (f_n) diverge dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Donc l'espace $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas de Banach.