Projet X : Autour des nombres de Markov

En 1979, le mathématicien russe Andreï Markov a étudié les triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) solutions de l'équation suivante (dite équation de Markov) :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \tag{1}$$

Un nombre de Markov est un nombre apparaissant dans un triplet de Markov. Le but de ce projet (Python) est d'étudier certaines propriétés arithmétiques des triplets de Markov.

1. Triplets de Markov

Définition. On dit que (x, y, z) est un *triplet de Markov* si x, y, z sont des entiers > 0 satisfaisant l'équation de Markov (1). Si $x \leq y \leq z$, on dit que c'est un triplet de Markov *normalisé*.

Par symétrie de l'équation de Markov, on peut réordonner les coordonnées de n'importe quel triplet de Markov pour obtenir un triplet de Markov normalisé.

1. Ecrire en Python un algorithme `Ordonner` prenant en entrée une liste d'entiers et qui la réordonne dans l'ordre croissant.
2. Implémenter un algorithme `EstTriplet` prenant en entrée une liste de 3 entiers $[x, y, z]$ et qui renvoie "True" si (x, y, z) est un triplet de Markov et "False" sinon.
3. Déterminez tous les triplets de Markov de la forme (x, x, x).
4. Nous allons maintenant déterminer les triplets de Markov dont exactement deux coordonnées sont égales. Soit (x, z, z) un triplet de Markov avec $x < z$. Montrez que $(3x - 2)z^2 = x^2$.
5. En déduire une contradiction. Il n'y a donc aucun triplet de Markov de la forme (x, z, z) avec $x < z$.
6. Supposons maintenant que (x, x, z) est un triplet de Markov avec $x < z$. Montrez que x^2 divise z^2, puis que x divise z.
7. Posons $z = kx$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrez que $k(3x - k) = 2$ puis en déduire l'ensemble des triplets de Markov normalisés de la forme (x, x, z) avec $x < z$.

1. Arbre de Markov

Le but de cette partie est de décrire une méthode pour obtenir tous les triplets de Markov. On définit la fonction T par la formule $T(x, y, z) = (x, y, 3xy - z)$.

1. Implémentez la fonction T en Python. On prendra en entrée une liste d'entiers $[x, y, z]$.
2. Montrez que si (x, y, z) est un triplet de Markov, alors $T(x, y, z)$ l'est aussi.
3. Montrez que $T(T(x, y, z)) = (x, y, z)$.
4. Soit (x, y, z) un triplet de Markov normalisé avec $z > 1$. Montrez que $3xy - z < z$. *Indication :* Multipliez par z puis montrez que cela revient à montrer que $2(x^2 + y^2) < 3xyz$. On pourra alors utiliser le fait que $z \geq y + 1$ (qu'on justifiera).
5. Montrez que $3yz - x \geq 3xz - y > z$.

On appelle *taille* d'un triplet d'entiers la valeur de sa plus grande coordonnée. Soit $t = (x, y, z)$ un triplet de Markov normalisé. Par les questions précédentes, on vient de prouver qu'on peut associer à t trois autres triplets de Markov (pas forcément normalisés) : $t_1 = (x, y, 3xy - z)$, $t_2 = (x, z, 3xz - y)$ et $t_3 = (y, z, 3yz - x)$. Par ailleurs, la taille de t_2 et la taille de t_3 sont toutes deux strictement plus grande que la taille de t (qui vaut z puisque t est normalisé). D'autre part, la taille de t_1 est strictement inférieure à la taille de t.

6. Ecrire un programme Python `TripletEnfants` qui prend en entrée un triplet de Markov normalisé $[x, y, z]$ et qui renvoie les deux plus grands triplets de Markov **normalisés** – appelés *enfants* de $t = (x, y, z)$ – associés par la méthode précédente à t. Ecrire un programme `TripleAncetre` qui associe à $[x, y, z]$ le plus petit triplet de Markov normalisé – appelé ancêtre de t – associé à t par la méthode précédente.
7. Donnez la liste des 8 premiers triplets de Markov qu'on peut obtenir en utilisant successivement `TripletEnfants` en commençant avec $t = (1, 1, 1)$.
8. Justifier que tout triplet de Markov normalisé t est un descendant de $(1, 1, 1)$, autrement dit qu'il existe une suite de triplets de Markov (normalisés) $t_0, t_1, \ldots, t_n$ telle que $t_0 = (1, 1, 1)$, $t_n = t$ et t_{k+1} est un enfant de t_k pour $k = 0, \ldots, n-1$. *Indication :* Constuire une suite de triplets de Markov normalisés $u_0 = t$, $u_1, \ldots$ où u_{k+1} est l'ancêtre de u_k. Justifiez que cette suite est finie et que le dernier ancêtre est nécessairement $(1, 1, 1)$.
9. Proposez un algorithme `ArbreMarkov` prenant en entrée un entier n et renvoyant l'arbre de Markov construit à partir de l'ancêtre $(1, 2, 5)$ jusqu'aux enfants de la génération n. *Indication :* Plusieurs choix sont possibles pour la structure de l'Arbre. Ce peut être une structure récursive de type liste à trois éléments telle que
   (a) $L[0]$ soit la racine (on commence avec $(1, 2, 5)$)
   (b) $L[1]$ soit la branche de droite (encore une liste à trois éléments donnant la valeur du triplet, la branche de droite et la branche de gauche)
   (c) $L[2]$ soit la branche de gauche.

2. Nombres de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ par $(F_0, F_1) = (0, 1)$ et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$

1. Implémentez un programme `FiboListe` prenant en entrée un entier n et renvoyant la liste $[F_0, F_1, \ldots, F_n]$.
2. Implémentez un algorithme récursif `FiboRec` prenant un entier n et renvoyant F_n.
3. Prouvez que pour tout $n \geq 0$ on a $3F_{2n+1} - F_{2n-1} = F_{2n+3}$.
4. Etant donné un entier $n \geq 1$, on note $M_n = (1, F_{2n-1}, F_{2n+1})$. Déduire de la question précédente que $M_{n+1} = T(1, F_{2n+1}, F_{2n-1})$.
5. Prouvez par récurrence sur n que M_n est un triplet de Markov pour tout entier $n \geq 1$.