

Construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ **Propriétés de $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$**

- i) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}, (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3).$
- ii) $\forall m \in \mathbb{R}, m + 0 = 0 + m = m.$
- iii) $\forall m \in \mathbb{R}, m + (-m) = (-m) + m = 0.$
- iv) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 + m_2 = m_2 + m_1.$
- v) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}, m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3) = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3.$
- vi) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}, m_1 \cdot (m_2 + m_3) = m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3,$
 $(m_1 + m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_3.$
- vii) $\forall m \in \mathbb{R}, m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$
- viii) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1.$
- ix) $\forall 0 \neq r \in \mathbb{R}, \exists r^{-1} \in \mathbb{R}, r r^{-1} = 1.$
- x) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists 0 \neq q \in \mathbb{Z}, r = p q^{-1}.$
- xi) $\forall m \in \mathbb{R}, m \leq m.$
- xii) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 \leq m_2$ et $m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2.$
- xiii) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}, m_1 \leq m_2 \leq m_3 \Rightarrow m_1 \leq m_3.$
- xiv) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 \leq m_2$ ou $m_2 \leq m_1.$
- xv) $\forall m_1 \leq m_2, \forall m_3 \in \mathbb{R}, m_1 + m_3 \leq m_2 + m_3.$
- xvi) $\forall m_1 \leq m_2, \forall m_3 \in \mathbb{R}, 0 < m_3 \Rightarrow m_1 m_3 \leq m_2 m_3.$
- xvii) *Propriété de la borne sup.* Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.^a

a. c-à-d $\forall \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, si A est majorée, alors il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A, a \leq s$ et si $m \in \mathbb{R}, A \leq m \Rightarrow s \leq m.$

Exercice.

- a) En utilisant les propriétés ci-dessus, montrer que pour tout $0 < x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq x.$
- b) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c-à-d :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y.$$

Solution. a) Si $\forall n \in \mathbb{N}, n < x$, soit $x_0 = \inf A$ où $A = \{t \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, n < t\}.$ Alors $x_0 + 1$ n'est pas un minorant de A donc il existe $t \in A$ tel que $t < x_0 + 1.$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq t < x_0 + 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n - 1 < x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n < x_0 \Rightarrow x_0 \in A.$$

Mais on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n + 1 < x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n < x_0 - 1 \Rightarrow x_0 - 1 \in A$$

absurde car x_0 est un minorant de A .

b) Si $x < y$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{y-x}$ c-à-d $\frac{1}{n} < y - x$. Soit $m = \max\{l \in \mathbb{Z} : \frac{l}{n} \leq x\}$. Alors

$$\frac{l}{n} \leq x < \frac{l+1}{n}.$$

Vérifier que $x < \frac{l+1}{n} < y$.

1 Construction de $\mathbb{R}$

Définition. Soit $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite de rationnels. On dit que c'est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < \epsilon$.

Exemples. Les suites

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

$$x_0 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$$

sont de Cauchy mais n'ont pas de limite dans $\mathbb{Q}^{\dagger}$.

Exercice. Toute suite de Cauchy est bornée.

Exercice. Toute suite croissante majorée est de Cauchy.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On vérifie que si $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \mathcal{C}$, alors $x + y = (x_n + y_n)_n, xy = (x_n y_n)_n$ aussi.

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des suites $x = (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0.[‡]

Si $x \in \mathcal{C}$, on pose $\bar{x} := x + \mathcal{N} = \{x + u : u \in \mathcal{N}\}$.

On pose $R := \mathcal{C}/\mathcal{N} = \{\bar{x} : x \in \mathcal{C}\}$.

En particulier, si $x, y \in \mathcal{C}$, alors $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow \lim x_n - y_n = 0$.

[†]. la première converge vers e , la deuxième vers $\sqrt{2}$

[‡]. c-à-d $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n| < \epsilon$.

1.1 Inclusion de $\mathbb{Q}$ dans R

Si $r \in \mathbb{Q}$, on note $\mathbf{r} = (r, r, \dots)$ la suite constante égale à r .

Proposition 1.1 *L'application $\mathbb{Q} \rightarrow R, r \mapsto \bar{\mathbf{r}}$ est injective.*

Notation. On identifiera $r \in \mathbb{Q}$ avec la classe $\bar{\mathbf{r}} \in R$.

1.2 Opérations sur R

Si $x, y \in \mathcal{C}$, on pose $\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}$, $\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{xy}$.

Proposition 1.2 *Les opérations $+$ et $\cdot$ sont bien définies et pour ces opérations $(R, +, \cdot)$ est un corps.*

Démo. Soit $x \in \mathcal{C}$. Si $x \notin \mathcal{N}$, comme x est de Cauchy, il existe $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N, |x_n| \geq \epsilon$. Quitte à ajouter une suite nulle à partir du rang N , on peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \geq \epsilon$.

On a alors $\bar{x}^{-1} = \left(\frac{1}{x_n} \right)_n$.

1.3 Relation d'ordre sur R

Si $\bar{x}, \bar{y} \in R$, on note $\bar{x} \leq \bar{y}$ si :

$$\exists u \in \mathcal{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n + u_n \leq y_n .$$

Lemme. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy qui ne tend pas vers 0.

Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \geq \epsilon$$

ou

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \leq -\epsilon .$$

Démo. Il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n| \geq \epsilon .$$

Comme x est de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m, n \geq N_1, |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Il existe alors $n_1 \geq N_1$ tel que $|x_{n_1}| \geq \epsilon$. Si par exemple, $x_{n_1} \geq \epsilon$, alors

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_1, x_n &= x_{n_1} + x_n - x_{n_1} \geq x_{n_1} - |x_n - x_{n_1}| \\ &\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que si $x \notin \mathcal{N}$, alors $\bar{x} > 0$ ou $\bar{x} < 0$.

D'où la

Proposition 1.3 *i) La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur R .*

ii) $(R, +, \cdot, \leq)$ est un corps ordonné archimédien.[†]

iii) $\mathbb{Q}$ est dense dans R au sens où $\forall \bar{x} < \bar{y}$ dans R , $\exists r \in \mathbb{Q}$, $\bar{x} < r < \bar{y}$.

1.4 Borne supérieure

Définition. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $A \subseteq E$ on dit que $M \in E$ est un majorant de A , resp. $m \in E$ est un minorant de A , si $\forall a \in A$, $a \leq M$, resp. $\forall a \in A$, $a \geq m$.

On dit que $s \in E$ est une borne supérieure de A si

- 1) s est un majorant de A
et
- 2) pour tout majorant M de A , $s \leq M$.

On dit que $i \in E$ est une borne inférieure de A si

- 1) i est un minorant de A
et
- 2) pour tout minorant m de A , $i \geq m$.

Notation. S'ils existent, $\sup A := s$, $\inf A := i$.

On dit que $(E, \leq)$ a la propriété de la borne supérieure, resp. la propriété de la borne inférieure, si toute partie non vide majorée de E admet une borne supérieure, resp. si toute partie non vide minorée de E admet une borne inférieure.

Exercice. Si $(E, \leq)$ a la propriété de la borne supérieure, alors il a aussi la propriété de la borne inférieure.

[†]. Un corps ordonné est un corps $(K, +, \cdot)$ avec un ordre total $\leq$ tel que 1) $\forall z \in K$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$; 2) $\forall z \geq 0$, $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$. Un corps ordonné archimédien est un corps ordonné $(K, +, \cdot, \leq)$ tel que $\forall x \in K, \forall y > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $ny = \underbrace{y + \dots + y}_{n \text{ fois}} \geq x$.

Solution. $\inf A = \sup\{\text{minorants de } A\}$.

Exemples et contre-exemples.

$$\inf\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0, \sup\left\{\sum_{k=0}^n 2^{-k} : n \in \mathbb{N}\right\} = 2$$

Les ensembles

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, \left\{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

n'ont pas de bornes supérieures dans $\mathbb{Q}$.

1.5 R est complet

Proposition 1.4 L'ensemble ordonné $(R, \leq)$ vérifie la propriété de la borne supérieure et donc aussi la propriété de la borne inférieure.

Démonstration : Soit $\emptyset \neq A \subseteq R$ une partie majorée ; Soit $m_0 \in \mathbb{Q}$ un majorant de A . Soit $l_0 \in \mathbb{Q}$ qui n'est pas un majorant de A .

On définit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_{n+1} := \begin{cases} \frac{m_n + l_n}{2} & \text{si } \frac{m_n + l_n}{2} \text{ majore } A \\ m_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{et } l_{n+1} := \begin{cases} l_n & \text{si } \frac{m_n + l_n}{2} \text{ majore } A \\ \frac{m_n + l_n}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}, l_n, m_n \in \mathbb{Q}, l_n \leq m_n$ et que la suite (l_n) est croissante et la suite (m_n) décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, m_n - l_n = \frac{m_0 - l_0}{2^n}$ donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, l_n &\leq l_{n+1} \leq m_{n+1} \leq m_n \\ \Rightarrow 0 &\leq m_n - m_{n+1} \leq m_n - l_n = \frac{m_0 - l_0}{2^n} . \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall k > n, m_n - m_k \leq m_n - l_n = \frac{m_0 - l_0}{2^n} .$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_n \frac{m_0 - l_0}{2^n} = 0$, il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \frac{m_0 - l_0}{2^n} < \epsilon .$$

alors :

$$\forall k > n \geq N, m_n - m_k < \epsilon .$$

Donc la suite (m_n) est de Cauchy. De même pour la suite (l_n) .

On a $\bar{m} = \bar{l} \in R$.

Vérifions que $\bar{m}$ est une borne supérieure pour A .

Soit $a \in A$. Alors pour tout n , $m_n \geq a$, car m_n est un majorant de A .

Donc $\bar{m} \geq a$ (*exo*).

Donc $\bar{m}$ est un majorant de A .

Réciproquement, soit M un majorant de A . Alors pour tout n , $l_n < M$ car l_n n'est pas un majorant de A .

On en déduit que $\bar{l} = \bar{m} \leq M$.

Donc $\bar{l} = \bar{m}$ est bien le plus petit majorant de A .

Q.e.d.

Corollaire. Toute suite croissante majorée dans R converge dans $R^\dagger$. De même, toute suite décroissante minorée dans R converge dans R .

Démonstration : Si $(x_n) \in R^\mathbb{N}$ est une suite croissante majorée, alors $\lim_n x_n = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Q.e.d.

Proposition 1.5 *Toute suite de Cauchy[†] dans R converge.*

Démonstration : La suite (x_n) est de Cauchy donc bornée (*exo*). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\bar{x}_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ et $\underline{x}_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$.

†. **Définition.** Si $(x_n) \in R^\mathbb{N}$, on dit que (x_n) converge vers $l \in R$, noté $\lim_n x_n = l \in R$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| < \epsilon .$$

‡. **Définition.** Une suite réelle $(x_n) \in R^\mathbb{N}$ est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < \epsilon .$$

La suite $(\bar{x}_n)$ est décroissante et la suite $(\underline{x}_n)$ est croissante (*exo*). De plus,

$$\forall n, \underline{x}_n \leq x_n \leq \bar{x}_n .$$

Les limites $l_1 = \lim_n \bar{x}_n$ et $l_2 = \lim_n \underline{x}_n$ existent dans R .

Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite (x_n) est de Cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < \epsilon .$$

Donc $\forall m, n \geq N, x_m - x_n < \epsilon \Rightarrow \forall n \geq N, \bar{x}_N - x_n \leq \epsilon \Rightarrow \bar{x}_N - \underline{x}_N \leq \epsilon$.

Or, la suite $(\bar{x}_n - \underline{x}_n)$ est décroissante donc :

$$\forall n \geq N, \bar{x}_n - \underline{x}_n \leq \epsilon \Rightarrow l_1 - l_2 \leq \epsilon .$$

C'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $0 \leq l_1 - l_2 \leq 0 \Rightarrow l_1 = l_2$.

Donc $\lim_n x_n = l_1 = l_2$ existe dans R .

Q.e.d.

Dorénavant on notera $\mathbb{R} = R$.