

Construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$

Propriétés de $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$

- i) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Q}, (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3).$
- ii) $\forall m \in \mathbb{Q}, m + 0 = 0 + m = m.$
- iii) $\forall m \in \mathbb{Q}, m + (-m) = (-m) + m = 0.$
- iv) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Q}, m_1 + m_2 = m_2 + m_1.$
- v) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Q}, m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3) = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3.$
- vi) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Q}, m_1 \cdot (m_2 + m_3) = m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3,$
 $(m_1 + m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_3.$
- vii) $\forall m \in \mathbb{Q}, m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$
- viii) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Q}, m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1.$
- ix) $\forall 0 \neq r \in \mathbb{Q}, \exists r^{-1} \in \mathbb{Q}, rr^{-1} = 1.$
- x) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ et $\forall r \in \mathbb{Q}, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists 0 \neq q \in \mathbb{Z}, r = pq^{-1}.$
- xi) $\forall m \in \mathbb{Q}, m \leq m.$
- xii) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Q}, m_1 \leq m_2$ et $m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2.$
- xiii) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Q}, m_1 \leq m_2 \leq m_3 \Rightarrow m_1 \leq m_3.$
- xiv) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Q}, m_1 \leq m_2$ ou $m_2 \leq m_1.$
- xv) $\forall m_1 \leq m_2, \forall m_3 \in \mathbb{Q}, m_1 + m_3 \leq m_2 + m_3.$
- xvi) $\forall m_1 \leq m_2, \forall m_3 \in \mathbb{Q}, 0 < m_3 \Rightarrow m_1 m_3 \leq m_2 m_3.$

1 Définition de $\mathbb{Q}$.

On suppose que $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ existe avec les propriétés usuelles.

On pose $\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \forall 0 \neq n, n' \in \mathbb{Z}, (m, n) \sim (m', n')$ si $mn' = m'n$.

On pose $m//n := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (m, n) \sim (a, b)\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : mb = na\}.$ [†]

On pose $Q = \{m//n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$

Exo. $m//n = m'//n' \Leftrightarrow mn' = m'n.$

Exo. $\mathbb{Z} \rightarrow Q, n \mapsto n//1$ est injective.

[†]. $m//n = \ll \frac{m}{n} \gg$

2 Addition

On définit :

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \forall 0 \neq n, n' \in \mathbb{Z}, m//n + m'//n' := (mn' + m'n)//nn'.$$

Exo. C'est bien défini.

3 Produit

On définit :

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \forall 0 \neq n, n' \in \mathbb{Z}, m//n . m'//n' := mm'//nn'.$$

Exo. C'est bien défini.

$$\textit{Exo. } \forall 0 \neq m, n \in \mathbb{Z}, m//n . n//m = 1//1.$$

4 Ordre

On définit :

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \forall n, n' \in \mathbb{Z}_{>0}, m//n \leq m'//n' \text{ si } mn' \leq m'n.$$

Exo. C'est bien défini.

$$(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$$

vérifie les propriétés voulues.

$$\textit{Exo. } \forall r, s \in \mathbb{Q}, \exists t \in \mathbb{Q}, r < t < s.$$

$$\textit{Solution. Il suffit de poser } t = (r + s)/2.$$