

Séries

Exercice 1

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose $a_n \sim b_n$.

a) Montrer que si $\sum_n a_n$ converge, alors $\sum_n b_n$ converge aussi et que :

$$\sum_{k>n} a_k \sim \sum_{k>n} b_k.$$

b) Montrer que si $\sum_n a_n$ diverge, alors $\sum_n b_n$ diverge aussi et que :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k \sim \sum_{1 \leq k \leq n} b_k.$$

c) En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exercice 2

a) Montrer que pour tout $0 \leq x \leq 1$,

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

En déduire $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

b) Montrer que pour tout $0 \leq x \leq 1$,

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \leq \arctan x \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

En déduire $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 Formule de Stirling

On pose $d_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$.

a) Montrer que $d_n - d_{n+1} = (2n+1)h\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1$ où $h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

b) En déduire que d_n est décroissante.

c) On admet la formule :

$$\forall |x| < 1, h(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

En déduire que la suite $d_n - \frac{1}{12n}$ est croissante.

d) En déduire que $\lim d_n$ existe et est > 0 .

e) Montrer qu'il existe une constante C telle que $n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

f) En admettant que $\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}$, montrer que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 4 Produit de Cauchy des séries

a) Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergeant vers respectivement $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\lim_n \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0}{n+1} = ab.$$

Indication. Commencer par le cas où $a = b = 0$.

b) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites.

On pose $\forall n, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et $C_n = c_0 + \dots + c_n$.

Si $\sum_n a_n$ converge vers A et si $\sum_n b_n$ converge vers B , alors

$$\lim_n \frac{C_0 + \dots + C_n}{n+1} = AB.$$

c) En déduire que si $\sum_n a_n, \sum_n b_n, \sum_n c_n$ convergent vers respectivement A, B, C , alors $A = BC$.

d) Soient $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que $\sum_n a_n$ converge mais que $\sum_n (\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k})$ diverge.