

Nombres complexes

Exercice 1

Soient $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Écrire z_3 sous forme algébrique.
- En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$.
- Soit $-1, 0 \neq z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Soient $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$.
Montrer que

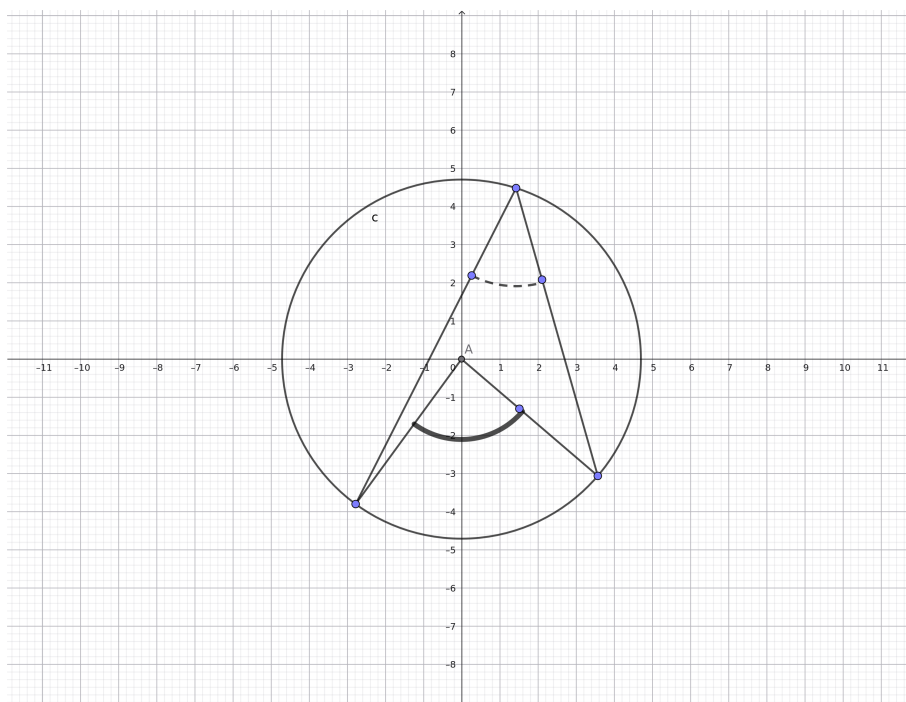
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = 2 \arctan \left(\frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Exercice 2

Résoudre $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

Exercice 3

Démontrer le théorème de l'angle inscrit avec des nombres complexes.



Exercice 4

- a) Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 = 0$. En déduire que

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

- b) Soit $w = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Montrer que $w^{-3} + w^{-2} + w^{-1} + 1 + w + w^2 + w^3 = 0$. En déduire que $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ est une racine du polynôme :

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

- c) Calculer $\cos \frac{2\pi}{7}$.

Exercice 5 Définition de l'exponentielle complexe

Si $z \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, on pose $e_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose $c_{k,n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

- a) Montrer que $q > p \geq k \Rightarrow c_{k,q} - c_{k,p} > 0$. En déduire que la suite $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right)_n$ est de Cauchy.
- b) Montrer que si $z_n \rightarrow z$, alors

$$\lim \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$