À propos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Principe de récurrence.
Soient (H_n), $n \geqslant n_0$, des « propositions ».
Si
- *initialisation :* (H_{n_0}) est vraie,
- *hérédité :* $\forall\, n \geqslant n_0$, $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$,

alors (H_n) est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 1 (Raisonnement par récurrence) a) Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ où $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

b) Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall\, x \geqslant -1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.

d) On pose $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $\forall\, n \geqslant 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

e) Montrer que tout entier $\geqslant 1$ s'écrit de la forme $2^m(2n+1)$ pour certains entiers $m, n \in \mathbb{N}$.

f) Montrer que tout entier $\geqslant 1$ est un produit de nombres premiers.

g) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme :

$$2^{a_1} + ... + 2^{a_p}$$

pour certains entiers $0 \leqslant a_1 < ... < a_p$, $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Quelques bijections) Montrer que les applications suivantes sont bijectives.

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{>0}$, $(m, n) \mapsto 2^m(2n+1)$.

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$.

c) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $n \mapsto r_n$ où :

$$r_0 = 1$$

et si $r_n = \frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$ premiers entre eux,

$$r_{2n+1} := \frac{a}{a+b},\ r_{2n+2} := \frac{a+b}{a}$$

indication : vérifier que la réciproque est donnée par $g(1) = 0,\ g(q) = 2g\left(\frac{1}{q-1}\right) + 2$ *si* $q > 1,\ g(q) = 2g\left(\frac{q}{1-q}\right) + 1$ *si* $0 < q < 1$.

d) $\mathscr{P}_{finie}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $\{a_1 < ... < a_N\} \mapsto 2^{a_1} + ... + 2^{a_N}$.