

Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$

Propriétés de $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$

- i) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}, (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3).$
- ii) $\forall m \in \mathbb{Z}, m + 0 = 0 + m = m.$
- iii) $\forall m \in \mathbb{Z}, m + (-m) = (-m) + m = 0.$
- iv) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 + m_2 = m_2 + m_1.$
- v) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}, m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3) = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3.$
- vi) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}, m_1 \cdot (m_2 + m_3) = m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3,$
 $(m_1 + m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_3.$
- vii) $\forall m \in \mathbb{Z}, m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$
- viii) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1.$
- ix) $\forall m \in \mathbb{Z}, m \leq m.$
- x) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 \leq m_2 \text{ et } m_2 \leq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2.$
- xi) $\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}, m_1 \leq m_2 \leq m_3 \Rightarrow m_1 \leq m_3.$
- xii) $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 \leq m_2 \text{ ou } m_2 \leq m_1.$
- xiii) $\forall m_1 \leq m_2, \forall m_3 \in \mathbb{Z}, m_1 + m_3 \leq m_2 + m_3.$
- xiv) $\forall m_1 \leq m_2, \forall m_3 \in \mathbb{Z}, 0 < m_3 \Rightarrow m_1 m_3 \leq m_2 m_3.$

1 Définition de $\mathbb{Z}$.

On suppose que $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ existe avec les propriétés usuelles.

On pose $\forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \sim (m', n')$ si $m + n' = m' + n$.

On pose $[(m, n)]_{\sim} := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (m, n) \sim (a, b)\} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m + b = n + a\}.$ [†]

On pose $Z = \{[m, n]_{\sim} : m, n \in \mathbb{N}\}.$

Exo. $[(m, n)]_{\sim} \cap [(m', n')]_{\sim} \neq \emptyset \Rightarrow [(m, n)]_{\sim} = [(m', n')]_{\sim}.$

$\forall n \in \mathbb{N}, [n, n]_{\sim} = [0, 0]_{\sim}$

$\mathbb{N} \rightarrow Z, n \mapsto (n, 0)$ est injective.

[†]. $[(m, n)]_{\sim} = \ll m - n \gg$

2 Addition

On définit :

$$\forall m, m', n, n' \in \mathbb{N}, [m, n]_{\sim} + [m', n']_{\sim} := [m + m', n + n']_{\sim}.$$

Exo. C'est bien défini.

3 Produit

On définit :

$$\forall m, m', n, n' \in \mathbb{N}, [m, n]_{\sim} \cdot [m', n']_{\sim} := [mm' + nn', mn' + m'n]_{\sim}.$$

Exo. C'est bien défini.

4 Ordre

On définit :

$$\forall m, m', n, n' \in \mathbb{N}, [m, n]_{\sim} \leq [m', n']_{\sim} \text{ si } m + n' \leq m' + n.$$

Exo. C'est bien défini.

Exo.

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, [m, n]_{\sim} + [n, m]_{\sim} = [0, 0]_{\sim}$$

$$(Z, +, \cdot, \leq)$$

vérifie les propriétés voulues.