

À propos des fractions continues

Définition. Si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $a_n \neq 0$, on pose

$$[a_0, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Proposition. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Si $a_n > 0$, alors :

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{A_n}{B_n}$$

où

$$A_n = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & & \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \text{et} \quad B_n = \left| \begin{array}{cccc} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Théorème 0.1 Supposons $\forall i, a_i \in \mathbb{N}_{>0}$, alors posons $\forall n \in \mathbb{N}, x_n := [a_0, \dots, a_n]$.

- i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n-1} \leq \dots \leq x_1$.
- ii) $\lim_n x_{2n+1} - x_{2n} = 0$.
- iii) Les suites $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée :

$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Remarque. Le théorème reste vrai si on suppose seulement $\forall i, a_i \in \mathbb{N}, \forall i$ impair, $a_i > 0$.

Théorème 0.2 Une bijection entre les suites d'entiers naturels et les réels ≥ 0

L'application

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto [a_0, 1, a_1, 1, \dots, 1, a_n, 1, \dots] := \lim_n \frac{A_n}{B_n}$$

où

$$A_n = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right| \quad \text{et} \quad B_n = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & a_1 & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right|$$

(Note: The diagrams above are simplified representations of the continued fraction structures shown in the image. The full image shows more complex nested structures with multiple levels of branching and diagonal connections.)

est une bijection strictement croissante[†].

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. On définit par récurrence

$$x_0 = x, x_{n+1} = \frac{1}{\{x_n\}}^{\ddagger}, \text{ si } x_n \notin \mathbb{N}. \text{ Sinon on ne définit pas } x_{n+1}.$$

On pose $\forall i \geq 0, a_i = E(x_i)$.

- i) Si $x_0, \dots, x_n$ sont définis et si $x_n \in \mathbb{N}$, alors $x = [a_0, \dots, a_n]$. Si x_n est défini pour tout n , alors $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.
- ii) Soit (b_k) une suite d'entiers telle que $\forall i \geq 1, b_i \geq 1$, alors $[b_0, b_1, \dots, b_n, \dots] \notin \mathbb{Q}$.

Exemples.

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots], e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$$

[†]. On choisit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ c-à-d $(a_n) < (b_n)$ s'il existe $k \geq 0$ tel que $\forall 0 \leq i < k, a_i = b_i$ et $a_k < b_k$.

[‡]. $\forall x \in \mathbb{R}, \{x\} = x - E(x)$