

Construction de $\mathbb{N}$

Propriétés de $\mathbb{N}$ ou *axiomes de Peano*

Il existe un ensemble noté $\mathbb{N}$ avec les propriétés suivantes :

- i) Il existe un élément noté $0 \in \mathbb{N}$.
- ii) Il existe une application $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifie ce qui suit.
- iii) $0 \notin s(\mathbb{N})$.
- iv) $\forall n, m \in \mathbb{N}, s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$.
- v) *Récurrence.* Si $S \subseteq \mathbb{N}$, si $0 \in S$ et si $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$, alors $S = \mathbb{N}$.

1 Définition de $\mathbb{N}$.

On pose $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$, ..., $n + 1 = n \cup \{n\}$, ...

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

On pose $s(n) = n + 1$.

2 Ordre

Si $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $n \leq m$ si $n \subseteq m$.

Exercice. La relation « $\leq$ » est une relation d'ordre total.

3 Addition

On définit *par récurrence* $n + 0 = n$, $n + s(m) = s(n + m)$.

Exercice. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n + m = m + n$, $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$, $(n + m) + p = n + (m + p)$.

4 Produit

On définit *par récurrence* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n.0 = 0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n.s(m) = s.n.m + n$.

Exercice. Les propriétés bien connues sont vérifiées :

$$\forall n, m, p, n.1 = 1.n = n, n.m = m.n, (n.m).p = n.(m.p), n.(m + p) = n.m + n.p$$