Développement décimal d'un nombre réel

Exemples.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{3} = 0,33...$$

$$\sqrt{2} - 1 = 0,41421356...$$

Soit $0 \leqslant x < 1$. On définit par récurrence une suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers par

$$a_0(x) = 0$$

et

$$\forall\, n \geqslant 1,\, a_n(x) = \max\left\{b \in \mathbb{N} \,:\, a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{b}{10^n} \leqslant x\right\}$$

c-à-d

$$\frac{a_n(x)}{10^n} \leqslant x - a_0 - \frac{a_1}{10} - ... - \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} < \frac{a_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^n} \ .$$

« L'entier $a_n(x)$ est le $n-$ième chiffre de x après la virgule. »

Proposition.

i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\, a_n(x) \in \{0, 1, ..., 9\}$.

ii) $\forall\, N \in \mathbb{N},\, \exists\, n \geqslant N,\, a_n(x) \neq 9$ [†].

Démonstration. Exercice.

Proposition. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers tels que :

$$a_0 = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, a_n \in \{0, ..., 9\},$$

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\, \exists\, n \geqslant N,\, a_n \neq 9.$$

Soit $x = \sup\left\{a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\, a_n = a_n(x)$.

Démo. Exercice.

On déduit des deux propositions le

†. *c-à-d* la suite $a_n(x)$ n'est pas stationnaire égale à 9 à partir d'un certain rang

Théorème. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$a_0 = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \in \{0, ..., 9\},$$

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ a_n \neq 9\ .$$

Les applications

$$\begin{array}{ccc}
[0,1[& \longrightarrow & \mathscr{E} \\[2em]
x & \longmapsto & (a_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \\[2em]
\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\} & \longleftarrow\!\!\dashv & (a_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{array}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Corollaire. L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.
Démo. En effet, si on avait $[0,1[= \{x_i\ :\ i\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$, on pourrait poser $a_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n(x_n) \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_n(x_n) = 0\ . \end{cases}$$

Vérifier que

$$x = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\} \notin \{x_i\ :\ i\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}\}.$$