Borne sup et borne inf

Définitions.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que m est un *majorant* de A si :

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant m.$$

On dit que s est une *borne supérieure* de A si s est un plus petit majorant de A *i.e.*

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant s \text{ et } \forall\, m \text{ majorant de } A,\ s \leqslant m$$

Remarque. Si la borne supérieure existe elle est unique et on la note $s = \sup A$.

On admettra que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

Exercice 1 a) Donner la définition d'une borne inférieure.

b) Montrer que si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ alors $\inf(A) = -\sup(-A)$.

c) Déterminer

$$\sup\left\{1 + 2^{-1} + ... + 2^{-n}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\},\ \inf\left\{\frac{1}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

d) Soient $\varnothing \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que B est majorée. Montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.

e) Soient A, B des parties majorées non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

f) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrer que

$$\sup\{f(x) + g(x)\ :\ x \in \mathbb{R}\} \leqslant \sup\{f(x)\ :\ x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x)\ :\ x \in \mathbb{R}\}$$

et donner un exemple où l'inégalité est stricte.

g) Montrer que les ensembles

$$\{x \in \mathbb{Q}\ :\ x^2 < 2\},\ \{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$$

n'ont pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

h) Soit $r > 0$. On pose $\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R}\ :\ x^n \leqslant r\}$. Montrer que α est bien défini et que $\alpha^n = r$.

— *« Propriété de la borne sup » : toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*
— *« Propriété des suites croissantes majorées convergentes » : toute suite croissante majorée de* $\mathbb{R}$ *a une limite réelle.*
— *« Complétude » : toute suite réelle de Cauchy a une limite réelle.*

Exercice 2 Montrer que les trois propriétés ci-dessus sont équivalentes.