Suites arithmético-géométriques et suites homographiques

1 Arithmético-géométrique

Proposition. Soient $1 \neq a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$. Soit (x_n) une suite telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = ax_n + b.$$

Alors la suite (y_n) définie par $y_n = x_n - x$ où $x = ax + b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.

Exercice. Exprimer en fonction de n la suite définie par :

$$x_0 = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

Solution. $-1 = 2.(-1) + 1$. On pose $y_n = x_n + 1$. On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = 2y_n \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = 2^n y_0 = 2^{n+1}$. donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2^{n+1} - 1$.

2 Homographiques

Proposition. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$. Soit (x_n) une suite telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}.$$

Supposons que la suite x_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Si l'équation $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ a deux racines distinctes $\alpha \neq \beta$, alors la suite (y_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}$$

est géométrique.

ii) Si l'équation $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ a une racine double γ, alors la suite (y_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{x_n - \gamma}$$

est arithmétique.

Exercice.

a) Exprimer en fonction de n la suite définie par :

$$x_0 = 2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{5x_n - 3}{x_n + 1}.$$

b) Exprimer en fonction de n la suite définie par :

$$x_0 = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 6 - \frac{9}{x_n}$$

.

Solution. a) $x = \frac{5x-3}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou 3. On pose donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{x_n - 3}{x_n - 1}.$$

On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 3}{x_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5x_n-3}{x_n+1} - 3}{\frac{5x_n-3}{x_n+1} - 1}$$
$$= \frac{2x_n - 6}{4x_n - 4} = \frac{1}{2}\frac{x_n - 3}{x_n - 1}$$
$$= \frac{1}{2}y_n \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{2^n}y_0 = -\frac{1}{2^n}.$$

Or,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{x_n - 3}{x_n - 1} \Leftrightarrow x_n(1 - y_n) = 3 - y_n \Leftrightarrow x_n = \frac{y_n - 3}{y_n - 1}$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{\frac{1}{2^n} + 3}{\frac{1}{2^n} + 1}.$$

b) Comme $x = 6 - \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$, on pose $y_n = \frac{1}{x_n - 3}$.
On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1} - 3} = \frac{1}{6 - \frac{9}{x_n} - 3}$$

$$= \frac{1}{3 - \frac{9}{x_n}} = \frac{x_n}{3x_n - 9} = \frac{x_n - 3}{3x_n - 9} + \frac{3}{3x_n - 9}$$
$$= \frac{1}{3} + y_n$$

$$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = y_0 + \frac{n}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{n}{3}$$

Or,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{1}{x_n - 3} \Leftrightarrow x_n = 3 + \frac{1}{y_n}$$
$$= 3 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{n}{3}}.$$