

Deux exemples de suites adjacentes et définitions de l'exponentielle et du logarithme

1 Définition de l'exponentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n > |x|$, on pose :

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad E_n(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}.$$

Proposition.

- a) Pour tout n , $e_n(x) \leq E_n(x)$.
- b) La suite $(e_n(x))_n$ est croissante. La suite $(E_n(x))_n$ est décroissante.
- c) $\lim_n E_n(x) - e_n(x) = 0$.

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{E}xp(x) = \lim_n e_n(x)$.

Démonstration :

- a) $e_n(x) \leq E_n(x) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$.
- b) Montrons que $(E_n(x))_{n \geq N}$ décroît.

Si $n \geq N$, alors

$$\begin{aligned} \frac{E_n(x)}{E_{n+1}(x)} &= \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}}{\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

or,

$$\frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{(n+1-x)n}{(n-x)(n+1)} = \frac{(n-x)n+n}{(n-x)(n+1)} = \frac{(n-x)(n+1) - (n-x) + n}{(n-x)(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)} .$$

Donc d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \frac{E_n(x)}{E_{n+1}(x)} &= \left(1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{x}{n-x}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right) = 1 . \end{aligned}$$

c) Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq E_n(x) - e_n(x) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

or, d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

donc :

$$0 \leq E_n(x) - e_n(x) \leq \frac{x^2}{n} E_n(x) \leq \frac{x^2}{n} E_N(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Q.e.d.

Propriétés.

- i) $\mathcal{Exp}(0) = 1$;
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{Exp}(x) > 0$;
- iii) $\forall x, x' \in \mathbb{R}, \mathcal{Exp}(x + x') = \mathcal{Exp}(x)\mathcal{Exp}(x')$;

Lemme. Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_n \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \mathcal{Exp}(x) .$$

Démonstration : Comme la suite (x_n) converge, il existe $N > \sup_n |x_n| + |x|$.

Si $n \geq N$, on a :

$$\frac{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n}{e_n(x)} = \left(\frac{n + x_n}{n + x}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{x_n - x}{n + x}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n + x}(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

en utilisant l'inégalité de Bernoulli.

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n}{e_n(x)} &= \left(1 + \frac{x_n - x}{n + x}\right)^n \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x_n - x}{n + x}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{1 - n \frac{x_n - x}{n + x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

en utilisant encore l'inégalité de Bernoulli.

Q.e.d.

Démonstration : (*des propriétés*)

ii), $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N > |x|, e_n(x) \geq e_N(x) > 0$.

iii) On a

$$e_n(x)e_n(x') = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x'}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x + x' + \frac{xx'}{n}}{n}\right)^n.$$

Or, $\lim_n x + x' + \frac{xx'}{n} = x + x'$ donc d'après le lemme précédent,

$$\mathcal{E}xp(x)\mathcal{E}xp(x') = \lim_n e_n(x)e_n(x') = \mathcal{E}xp(x + x').$$

Q.e.d.

2 Définition du logarithme

Remarques. Soient $n > x > 0$.

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \Leftrightarrow x = n(y^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$y = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \Leftrightarrow x = n\left(1 - \frac{1}{y^{\frac{1}{n}}}\right).$$

3 Définition du logarithme

Soit $x > 0$, soit $N > |x|$. Pour tout $n \geq N$, on note :

$$\lambda_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1), \quad L_n(x) = n \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right) .$$

Proposition.

- i) $\forall n \geq N, \lambda_n(x) \geq L_n(x)$.
- ii) La suite $(\lambda_n(x))_{n \geq N}$ est décroissante et la suite $(L_n(x))_{n \geq N}$ est croissante.
- iii) $\lim_n \lambda_n(x) - L_n(x) = 0$.

On notera $\mathcal{L}og(x) := \lim_n \lambda_n(x) = \lim_n L_n(x)$.

Démonstration :

i)

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) - L_n(x) &= n \left(x^{\frac{1}{n}} - 2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right) \\ &= n \left(\sqrt[n]{x} - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right)^2 \geq 0 . \end{aligned}$$

ii) Soit $x > 0$. Si $0 < x < n$, alors d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$\begin{aligned} x < 1 + x &\leq \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \Rightarrow x^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{x}{n} \\ &\Rightarrow \lambda_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1) < x < n . \end{aligned}$$

Soit $N > x > \lambda_n(x)$. Alors comme la suite $(e_k(\lambda_n(x)))_{k \geq N}$ est croissante :

$$\forall n \geq N, x = e_n(\lambda_n(x)) \leq e_{n+1}(\lambda_n(x))$$

or, $x = e_{n+1}(\lambda_{n+1}(x))$ d'où

$$\begin{aligned} e_{n+1}(\lambda_{n+1}(x)) &\leq e_{n+1}(\lambda_n(x)) \\ &\Rightarrow \lambda_{n+1}(x) \leq \lambda_n(x) \end{aligned}$$

car la fonction $t \mapsto e_{n+1}(t)$ est croissante sur $] -n-1, +\infty[$ et

$$\lambda_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1) > -n > -n-1, \quad \lambda_{n+1}(x) = (n+1)(x^{\frac{1}{n+1}} - 1) > -n-1 .$$

Doit $N > x$. Si $n \geq N$, alors

$$\forall n \geq N, \forall t \leq n, E_n(t) \geq E_{n+1}(t)$$

car la suite $E_n(t)_{n \geq t}$ est décroissante.

Or, $L_n(x) = n \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right) < n$ donc :

$$x = E_n(L_n(x)) \geq E_{n+1}(L_n(x))$$

$$\Rightarrow x = E_{n+1}(L_{n+1}(x)) \geq E_{n+1}(L_n(x)) \quad (*) .$$

Or,

$$\forall k, t \mapsto E_k(t)$$

est strictement décroissante sur $] -\infty, k[$ et

$$L_n(x) < n < n+1, L_{n+1}(x) < n+1 .$$

Donc

$$(*) \Rightarrow L_{n+1}(x) \geq L_n(x) .$$

$$\Rightarrow L_{n+1}(x) \geq L_n(x)$$

iii)

$$\forall 0 < x < n, \lambda_n(x) - L_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right)$$

$$= n \left(\sqrt{x^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{\sqrt{x^{\frac{1}{n}}}} \right)^2$$

$$= \frac{n}{x^{\frac{1}{n}}} (x^{\frac{1}{n}} - 1)^2$$

$$= \frac{\lambda_n(x)}{x^{\frac{1}{n}}} (x^{\frac{1}{n}} - 1) .$$

Or, $x^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{\lambda_n(x)}{n}$ donc $\lim_n x^{\frac{1}{n}} = 1$.

Donc $\lim_n \lambda_n(x) - L_n(x) = 0$.

Q.e.d.

Propriétés.

- i) $\mathcal{L}og(1) = 0$;
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = x, \forall x > 0, \mathcal{E}xp(\mathcal{L}og(x)) = x$;
- iii) $\forall x, x' > 0, \mathcal{L}og(xx') = \mathcal{L}og(x) + \mathcal{L}og(x')$;

Démonstration :

- i) *Facile !*
- ii) Soit $x > 0$. Comme $\lim_n \lambda_n(x) = \mathcal{L}og(x), x = \lim_n e_n(\lambda_n(x)) = \mathcal{E}xp(\mathcal{L}og(x))$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(E_n(x))_n$ est décroissante, on a $E_n(x) \geq \mathcal{E}xp(x)$
Or, les fonctions L_n sont croissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc

$$L_n(\mathcal{E}xp(x)) \leq L_n(E_n(x)) = x$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = \lim_n L_n(\mathcal{E}xp(x)) \leq x$$

De même comme la suite $(e_n(x))_n$ est croissante et comme les fonctions λ_n sont croissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$, on trouve :

$$x = \lambda_n(e_n(x)) \leq \lambda_n(\mathcal{E}xp(x))$$

$$\Rightarrow x \leq \mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = \lim_n L_n(\mathcal{E}xp(x)) .$$

Donc $\mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = x$.

- iii) Pour tout $x, x' > 0$,

$$n((xx')^{\frac{1}{n}} - 1) = x'^{\frac{1}{n}}n(x^{\frac{1}{n}} - 1) + n(x'^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\rightarrow_{n\infty} \mathcal{L}og(x) + \mathcal{L}og(x')$$

car $\lim_n x'^{\frac{1}{n}} = 1$.

Q.e.d.