MAT3175L – Géométrie pour le CAPES – Fiche d'exercice 6

Isométries du plan et de l'espace affines

1 Transformations affines du plan et nombres complexes

1. Donnez les écritures en nombres complexes des isométries planes (translations, rotations, réflexions, et symétries glissées).
2. Déterminez la nature de la composée des deux rotations $\rho_{B,-\vartheta} \circ \rho_{A,\vartheta}$, où A, B sont deux points du plan affine et ϑ un angle quelconque.
3. Donnez l'écriture en nombres complexes d'une transformation affine du plan.

2 Triangles directement similaires

Soit ABC, $A'B'C'$ deux triangles du plan affine.

1. On suppose que ces triangles ont un angle égal entre deux côtés proportionnels. Montrez qu'il existe alors une similitude directe envoyant l'un sur l'autre.
2. Même question en supposant cette fois que les triangles ont deux angles égaux.

3 Isométries affines de l'espace

Déterminez la nature des isométries de l'espace affine représentées par les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x' = z+1 \\ y' = x \\ z' = y-2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x+2y+2z-4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x-y+2z+2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x+2y-z+2) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x-8y-4z+1) \\ y' = \frac{1}{9}(-8x+y-4z+2) \\ z' = \frac{1}{9}(-4x-4y+7z+3) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-7x-4y-4z)-6 \\ y' = \frac{1}{9}(4x-8y+z)+7 \\ z' = \frac{1}{9}(-4x-y+8z)-10 \end{cases}$$

4 Repères affines

On se place pour cet exercice dans l'espace euclidienne $\mathbb{R}^3$. Soient trois droites D_1, D_2, D_3 non coplanaires et non parallèles à un même plan.

1. Montrer qu'il existe un repère affine $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel D_1, D_2, D_3 ont pour équations respectives :

$$D_1 : y = 0, z = 0; \quad D_2 : x = 0, z = 1; \quad D_3 : x = 1, y = 1.$$

2. Considérons un second triplet de droites D_1', D_2', D_3' satisfaisant les mêmes hypothèses. Trouver toutes les applications affines de R^3 telles que

$$\forall i, f(D_i) = D_i'$$

5 Rotations de l'espace

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e pour que la matrice ci-dessous représente une rotation de l'espace :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$