MAT3175L – Géométrie pour le CAPES – Fiche d'exercice 5
Applications affines

1 Théorème de Ménélaüs

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{P}$; soit A', B', C' trois points des droites (respectivement) $(BC), (AC), (AB)$. On pose

$$\alpha = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, \quad \beta = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}, \quad \gamma = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}.$$

On note h_1, h_2, h_3 les homothéties de centres (respectivement) A', B', C' et de rapports α, β, γ, et on pose

$$\phi = h_1 \circ h_2 \circ h_3.$$

1. Supposons, dans un premier temps, que A', B', C' soient alignés sur une droite $\mathscr{D}$. Montrez que $\phi(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ et que $\alpha\beta\gamma = 1$.
2. Réciproquement, supposons que $\alpha\beta\gamma = 1$. En étudiant la nature de l'application $h_2 \circ h_3$, montrer que $A' \in (BC)$ et en déduire que les trois points $A'B'C'$ sont alignés.

2 Affinités

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3 dirigé par le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On considère un repère $(O, \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$ (où $\mathscr{B}$ est une base de E). On note ϕ l'application affine définie (dans ce repère) par les équations :

$$\begin{cases} x' &= 3x + 4y - 2z - 4 \\ y' &= -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' &= 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$$

1. Montrer que les points laissés invariants par ϕ forment un plan affine $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation.
2. Déterminer une droite vectorielle $D \subset E$ telle que $M\phi(M) \in D$ pour tout $M \in \mathscr{E}$.
3. Soit π la projection affine sur $\mathscr{P}$ parallèlement à D. Pour tout $M \in \mathscr{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{M\phi(M)} \in E$ en fonction de $\overrightarrow{M\pi(M)}$.
4. Décrire la nature géométrique de l'application ϕ.

3 Projections affines

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3 dirigé par le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit ϕ une application affine sur $\mathscr{E}$ distincte de l'identité, et telle que $\phi \circ \phi$ soit constante :

$$\exists A \in \mathscr{E}, \forall M \in \mathscr{E}, \phi^2(M) = A.$$

1. Soit $\vec{\phi}$ l'application linéaire associée à ϕ. Montrer que $\vec{\phi}$ est nilpotente et en déduire les dimensions de son noyau et de son image.
2. Déterminer l'ensemble des points laissés invariants par ϕ.
3. Montrer qu'il existe deux points $B, C \in \mathscr{E}$ tels que :
   — $\phi(B) = C \neq A$,
   — A, B, C ne soient pas alignés,
   — $\phi(\mathscr{E}) = (AC)$ et $B \notin \phi(\mathscr{E})$.
4. Soit $\mathscr{P}$ la pré-image par ϕ de A. Montrer que $\mathscr{P}$ est un plan affine contenant (AC) mais pas B. Quel est son espace vectoriel directeur ?
5. Montrer que $\phi = \pi' \circ \pi$, où π est la projection affine sur (AB) parallèlement à $\mathscr{P}$ et π' la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à (BC).