MAT3175L – Géométrie pour le CAPES – Fiche d'exercice 4
Barycentres, convexité, et courbes de Bézier

1 Barycentres : Définitions et propriétés élémentaires

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$, chaque vecteur $\vec{u}$ de ce plan pouvant alors être identifié à ses coordonnées par rapport à cette base. Alternativement, on peut considérer les éléments de $\mathbb{R}^2$ comme les points d'un plan affine en fixant un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, où $O = (0, 0)$. Étant donnés deux points M, N de ce plan affine, on définira alors $\overrightarrow{MN} = M - N$ comme le vecteur du plan euclidien associé à ces deux points. On écrira de même $M = N + \overrightarrow{MN}$ et on supposera admis le fait que ces écritures sont cohérentes (ce qui découle de la relation entre coordonnées du vecteur et coordonnées des points). Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on considère $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de scalaires réels de somme non nulle et $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de points du plan affine. On appellera les scalaires λ_i les 'poids' des points P_i.

1. Montrez qu'il existe un unique élément $P \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{0}.$$
Ce point P est appelé 'barycentre de la famille de points pondérés'. On notera également
$$P = \sum_i \lambda_i P_i$$
2. Vérifiez que le barycentre d'une famille reste inchangé lorsqu'on multiplie toutes les masses par un même nombre α non nul. Sauf mentions contraires, on supposera dans ce qui suit que le poids total des familles considérées est égal à 1 sans perte de généralité.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$. On appelle 'segment' $[ab]$ l'ensemble des barycentres des points a et b affectés de masses positives. Démontrez que :
$$m \in [ab] \iff \exists \alpha \in [0, 1], m = \alpha a + (1 - \alpha) b.$$
On appelle isobarycentre de plusieurs points P_i l'unique barycentre formé lorsque les poids associés à chacun de ces points sont identiques. L'isobarycentre d'un segment est également appelé son milieu.
4. Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Montrez qu'ils ont même isobarycentre si et seulement si
$$\overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{bb'} + \overrightarrow{cc'} = \vec{0}.$$
5. Supposons désormais que a', b', c' soient situés sur les segments $[bc], [ac], [ab]$ respectivement. Exprimez l'isobarycentre de $a'b'c'$ comme un barycentre de abc, et montrez que ces isobarycentres sont contenus dans un hexagone dont on décrira les côtés.
6. Montrez que si a', b', c' sont les milieux de $[bc], [ac], [ab]$, alors les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre.

2 Courbes de Bézier : Définitions et cas élémentaires

Dans ce qui suit, on note L_n l'ensemble des n-uplets de points du plan (et on identifie naturellement L_1 et $\mathbb{R}^2$). On note également A l'ensemble des courbes paramétrées c de la forme
$$c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (x(t), y(t))$$
où x, y sont des fonctions continues.

On définit par récurrence une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de L_{n+1} dans A en posant :
$$B_0(P)(t) = P$$
et
$$B_n(P_0, \ldots, P_n)(t) = (1 - t) B_{n-1}(P_0, \ldots, P_{n-1})(t) + t B_{n-1}(P_1, \ldots, P_n)(t)$$

La courbe paramétrée $B_n(P_0, \ldots, P_n)$ est appelée 'courbe de Bézier associée aux pôles $P_0, \ldots, P_n$'. Pour toute famille $F = \{P_0, \ldots, P_n\} \in L_{n+1}$, on notera cette courbe $B_{n,F}$ ou même B_F.

1. Soit $F = \{P_0, P_1\} \in L_2$. Quelle est la nature de la courbe paramétrée B_F ?
2. Soit $F = \{P_0, P_1, P_2\}$. On note Q_0 le milieu de $[P_0P_1]$, Q_1 celui de $[P_1P_2]$. Exprimez $B_F(t)$ comme barycentre des points P_0, P_1, P_2, et donnez en particulier la nature géométrique des points $B_F(0), B_F(\frac{1}{2}), B_F(1)$.
3. Fixons $P_0 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (0,1)$. Calculez $\frac{d^2B_F}{dt^2}$ et déduisez-en la nature de la courbe paramétrée B_F.

3 Convexité

On dit qu'une partie non vide K du plan est convexe si et seulement si :

$$\forall M, N \in K, \forall \lambda \in [0,1], \lambda M + (1-\lambda)N \in K.$$

1. Montrez que cette condition est équivalente à la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (M_0, \dots, M_n) \in L_n, \forall (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_i \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i M_i \in K.$$

2. Soit E une partie non vide du plan, et W l'ensemble des parties convexes du plan contenant E. Montrez que

$$\bigcap_{K \in W} K$$

est une partie convexe du plan contenant E.
   On note cet ensemble $C(E)$ et on l'appelle 'enveloppe convexe de E'.
3. Soit G, H deux parties non vides du plan, montrez que :

$$G \subset H \Longrightarrow C(G) \subset C(H)$$

4. Montrez qu'une partie non vide $E \subset \mathbb{R}^2$ est convexe si et seulement si $E = C(E)$.
5. Montrez que $C(E)$ est l'ensemble des barycentres de familles de n points de E, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Premières applications de ces notions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille quelconque $F \in L_{n+1}$.

1. Démontrez que la trajectoire de la courbe paramétrée $B_{n,F}$ est incluse dans $C(F)$.
2. Soit φ une transformation affine du plan. Démontrez que :

$$\forall t \in [0,1], \varphi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\varphi(F)}(t).$$

3. Que peut-on dire de la courbe de Bézier associé à un triangle non aplati général à l'aide de la question précédente et du cas particulier traité à la fin de la seconde section ?

5 Polynômes de Bernstein

1. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $n+1$ fonctions polynômiales $b_{n,k} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré $k \in \{0, \dots, n\}$, et telles que pour tout $F \in L_{n+1}$, pour tout $t \in [0,1]$, on ait :

$$B_{n,F}(t) = \sum_k b_{n,k}(t) P_k$$

   Précisez la relation de récurrence qui lie les polynômes $b_{n+1,k}, b_{n,k}, b_{n,k}$.
2. Calculez $b_{3,k}(t)$ pour $k \in 0, 1, 2$, puis déterminez une expression générale de $b_{n,k}(t)$. On appelle ces fonctions 'polynômes de Bernstein'.
3. Que dire de la relation entre les courbes paramétrées $B_{n,F}$ et $B_{n,\tilde{F}}$, où $\tilde{F} = \{P_n, P_{n-1}, \dots, P_0\}$ est la famille obtenue en inversant l'ordre des pôles de la famille initiale ?
4. En calculant les dérivées de ces polynômes, démontrez que la courbe paramétrée $B_{n,F}$ admet pour tangente en P_0 (resp. P_n) la droite P_0P_1 (resp. $P_{n-1}P_n$).