MAT3175L – Géométrie pour le CAPES – Fiche d'exercice 1

1 Vrai ou faux, CAPES 2023, premier sujet (adapté)

1. On se place dans un espace vectoriel euclidien E muni d'un produit scalaire et de sa norme associée. Soit $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Alors les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.
2. On se place dans un espace vectoriel euclidien E. Pour tous vecteurs $x, y, z \in E$, on a :
$$(x|z) = (y|z) \Longrightarrow x = y$$
3. On se place dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire. Soit $x, y \in E$ tels que pour tout $z \in E$, on ait $(x|z) = (y|z)$. Alors
$$x = y$$
4. Dans l'espace euclidien usuel, le plan P d'équation $x - 2y + 3z = 4$ est perpendiculaire à la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 8 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$.

2 Produits scalaires

2.1 Exemples dans le plan

Déterminez lesquelles des formules suivantes définissent bien des produits scalaires sur $E = \mathbb{R}^2$:

1. $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$
2. $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = 3x_1 y_1 + 4x_2 y_2$
3. $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)}$
4. $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = 4x_1 y_2 - 2x_2 y_1$
5. $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$
6. $((x_1, x_2)|(y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1$

Pour chacun de ces produits scalaires, donnez en la matrice 2×2 vis-à-vis de la base canonique du plan, et calculez les produits scalaires et normes des vecteurs $(5, 6), (-1, -3)$ dans chaque cas.

2.2 Exemples plus généraux

Produit scalaire matriciel Montrez que la formule
$$(A|B) = Tr({}^t AB)$$
définit bien un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, où Tr dénote la trace d'une matrice.

En déduire que, pour toutes matrices $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques), on a :
$$Tr(AB)^2 \leq Tr(A^2)Tr(B^2)$$

Montrez que l'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminez son orthogonal pour ce produit scalaire.

Quelle est la norme de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Donnez une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Produit scalaire polynomial Montrez que la formule
$$(P|Q) = \sum_{i=0\ldots n} P(i)Q(i)$$
définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$.

Quel est l'orthogonal du sous-espace des polynômes constants ?

Produit scalaire fonctionnel Soit $\omega : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et continue. Montrez que la formule

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)dt$$

définit bien un produit scalaire sur $C^o([0,1])$, espace vectoriel des fonctions réelles continues sur le segment $[0,1]$.

Quelle est la norme de la fonction identité pour ce produit scalaire ?

Montrez que l'ensemble des fonctions affines $x \mapsto ax+b$ (pour deux coefficients $a,b \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $C^o([0,1])$ et déterminez en l'orthogonal.

3 Calculs dans un espace euclidien

1. Soit u et v deux vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\|u\| = 5$, $\|v\| = 2$, et $(u|v) = 3$. Calculez $\|2u - 3v\|$.
2. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrez que

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1 + x_2 + \ldots x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

   Commentez le cas d'égalité.
3. Montrez les formules suivantes, valables dans tout espace euclidien :

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$
$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

   A l'aide de dessins dans le plan (euclidien), interprétez ces formules et justifiez le nom d'identité du parallélogramme donnée à la seconde.
4. Montrez que la norme N_1 sur le plan $\mathbb{R}^2$, définie par l'équation

$$N_1(x,y) = |x| + |y|,$$

   ne satisfait pas l'identité du parallélogramme. Commentez l'expression de 'norme non-euclidienne'.

4 Orthocentre

Soit p, q, r, s quatre points de $\mathbb{R}^2$ (qu'on identifie aux vecteurs issues de l'origine). Montrez que la droite passant par p et q est perpendiculaire à celle passant par r et s si et seulement si

$$(p|r) + (q|s) = (p|s) + (q|r)$$

Soit p, q, r trois points de $\mathbb{R}^2$. On appelle *hauteurs* du triangle pqr les droites passant par chacun de ces points et normales à la droite passant par les deux autres. Montrez que les trois hauteurs sont des droites concourantes.

5 Calculs pratiques

Pour cet exercice, on se place dans $\mathbb{R}^3$.

— Appliquez la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base suivante :

$$(1,0,-1), \quad (1,1,1), \quad (-1,1,0)$$

— Donnez une équation cartésienne du plan normal à la droite générée par le vecteur $(1,0,1)$ passant par l'origine. Décomposez le vecteur $(2,3,4)$ comme somme d'un vecteur porté par cette droite et d'un vecteur dans ce plan. Généralisez cette décomposition à tout vecteur (a,b,c).

— Existe-t-il un plan contenant les points $(1,0,1)$, $(2,-1,0)$, $(1,1,1)$? Si oui, est-il unique ? (*Idée : considérez un vecteur (a_1, a_2, a_3) normal à un tel plan et déterminez les valeurs possibles de ces coefficients).*