Fiche de TD 6

Exercice 0 (*Un classique de Noel*)

Soit n un entier naturel non nul et t un réel. Dans $\mathbf{R}[X]$, quel est le reste de la division euclidienne de $(cost + sint\, X)^n$ par $X^2 + 1$?

Exercice 1 Trouver pgcd (A, B) ainsi que $U, V \in \mathbf{Q}[X]$ tels que $UA + VB =$ pgcd(A, B) pour les polynômes $A, B \in \mathbf{Q}[X]$ suivants:

i) $A = X^5 + 1$ et $B = X^3 + X + 1$.
ii) $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 1$.

Exercice 2 Soient deux entiers naturels $m > n \geq 1$ et $\delta =$pgcd (m, n). Pour $l \in \mathbf{N}^\times$, on désigne par U_l l'ensemble des racines $l-$ièmes de l'unité de $\mathbf{C}$.

1. Factoriser $X^n - 1$ en irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$.

2.
i) Montrer que $U_m \cap U_n = U_\delta$.
ii) En déduire, en se servant de la factorisation du 1, que $X^\delta - 1$ est un diviseur commun de $X^m - 1$ et $X^n - 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
iii) Montrer que $X^\delta - 1 =$ pgcd $(X^m - 1, X^n - 1)$.

3. (facultatif) Retrouver pgcd $(X^m - 1, X^n - 1)$ en se servant de l'algorithme d'Euclide.

Exercice 3 Factoriser les polynômes $P = X^6 + X^3 + 1$, $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $R = X^4 + 1$ sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$.
[*Pour rappel:* $(X - 1)(1 + X + \cdots + X^n) = X^{n+1} - 1$.]

Exercice 4 (Polynômes de Tchebychev)
Soit (T_n) la suite de $\mathbf{Z}[X]$ définie comme suit:

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1},\, n \in \mathbf{N}^\times.$$

1. Calculer les premiers termes T_2, T_3, T_4.
2. i) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout réel t,

$$T_n(cos\, t) = cos\, nt.$$

[*Procéder par récurrence.*]
ii) En déduire les racines de T_n.
iii) En déduire que $T_n(T_m) = T_{mn} = T_m(T_n)$.

Exercice 5 (Polynômes d'interpolation)
On désigne par $\mathbf{R}_{\leq n}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on fixe $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts.
1. Montrer que l'application d'évaluation

$$\varphi : \mathbf{R}_{\leq n}[X] \to \mathbf{R}^{n+1} : P \mapsto \varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. [*Penser au noyau de* φ.]

2. On se propose ici d'illustrer sur un cas simple trois méthodes de calcul de l'unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{\leq n}[X]$ tel que $\varphi(P) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.
On pose $n = 2$ et on fixe $(y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3$.
i) Méthode de Newton: On pose $P_0 = y_0 \in \mathbf{R}[X]$. Pour $j = 1, 2$, écrire les polynômes P_j et Q_j de degré au plus j tels que

$$P_j = P_{j-1} + Q_j \ \text{ et } \ P_j(x_k) = y_k \text{ pour } 0 \leq k \leq j.$$

$P = P_2$ est le polynôme d'interpolation recherché.

ii) Méthode de Lagrange: donner une deuxième expression de P en l'écrivant dans une base de Lagrange (L_0, L_1, L_2) de $\mathbf{R}_{\leq 2}[X]$ adaptée à la situation.

iii) Matrice de Vandermonde: donner une troisième méthode d'obtention de $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ en résolvant pour a_0, a_1, a_2 le système $P(x_j) = y_j, j = 0, 1, 2$.

Exercice 6 Soit $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ le corps fini à p éléments.
i) Faire la liste des polynômes unitaires de degré 1 et 2 sur $\mathbf{F}_2$ et sur $\mathbf{F}_3$. Quels sont les polynômes irréductibles de cette liste?
ii) Les polynômes $X^4 + X^2 + 1$ et $X^4 + X + 1$ sont-ils irréductibles sur $\mathbf{F}_2$? Sur $\mathbf{F}_3$?
iii) Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ sur $\mathbf{F}_2$ et sur $\mathbf{F}_3$.