Fiche de TD 5

Exercice 1
Faire la liste des sous-groupes du groupe de permutations S_3. Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui sont distingués?

Exercice 2 Répondre par *vrai* ou *faux* aux assertions suivantes:

A1. Pour tout $n \geq 2$, le groupe de permutations S_n a au moins $\binom{n}{2}$ sous-groupes d'ordre 2.

A2. Pour tout $n \geq 2$, S_n a au moins un sous-groupe cyclique d'ordre n.

A3. Pour tout $n \geq 3$, S_n a un sous-groupe d'indice 2 (pour rappel l'indice $[S_n : H]$ d'un sous-groupe H de S_n est le nombre de $H-$ classes à gauche).

Exercice 3
1. On considère le $6-$ cycle $c = (123456) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ du groupe de permutations S_6.

i) Calculer $c^l, l \in \mathbf{N}$.
[*Il est instructif de visualiser c^l sur une figure de l'hexagone.*]

ii) Donner la décomposition canonique en cycles et l'ordre de c^l pour tout $l \in [6]$.

2. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Donner la décomposition canonique en cycles, l'ordre et la signature de σ, τ et $\tau \circ \sigma$. Calculer σ^{333}.

Exercice 4 Soit S_n, le groupe de permutations.

1. Montrer par une récurrence sur $n \geq 2$ que toute permutation $\sigma \in S_n$ est la composée de transpositions (ij) avec $i, j \in [n], i < j$.
[*Pour l'hérédité, distinguer les cas* $\sigma(n+1) = n+1$ *et* $\sigma(n+1) \neq n+1$.]

2. Soit l un entier avec $2 \leq l \leq n$ et $c = (i_1 i_2 \cdots i_l)$ un cycle de longueur l de S_n. Confirmer que

$$c = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{l-1} i_l).$$

En déduire une deuxième preuve du 1. [*Se servir de la décomposition canonique en cycles.*]

3. Montrer que pour tout $i, j \in [n]$ avec $i < j - 1$ on a

$$(ij) = (j-1\, j)(i\, j-1)(j-1\, j).$$

En déduire que toute permutation σ de S_n est composée de transpositions de la forme $(i\, i+1)$ avec $i \in [n-1]$.

Exercice 5 (Centre et classes de conjugaison de S_n)

1. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et tout $l-$ cycle $c = (i_1 i_2 \cdots i_l) \in S_n$, on a

$$\sigma(i_1 i_2 \cdots i_l)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_l)).$$

2. Déterminer le centre Z_{S_n} de S_n [*Pour* $n \geq 3$*, choisir une partie* $\{i,j,k\} \subset [n]$ *de cardinal 3 et faire commuter* $\sigma \in Z_{S_n}$ *avec* (ij) *et* (jk).]

3. Fixons s cycles $c_1, c_2, \ldots, c_s$ de supports deux à deux disjoints de S_n et soit $\sigma \in S_n$. Ecrire la décomposition canonique de la permutation $\sigma\, c_1 c_2 \cdots c_s\, \sigma^{-1}$.

Sur S_n, la relation $\pi_1 \sim \pi_2$ s'il existe $\sigma \in S_n$ telle que $\pi_2 = \sigma\pi_1\sigma^{-1}$ est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées les *classes de conjugaison.*

4. Notons $n_j(\pi)$ le nombre de cycles de longueur $j \geq 1$ qui figurent dans la décomposition canonique de la permutation $\pi \in S_n$.
Soient π_1 et $\pi_2 \in S_n$. Montrer que $\pi_1 \sim \pi_2$ ssi $n_j(\pi_1) = n_j(\pi_2)$ pour tout $j \geq 1$.
[σ *transforme les supports des cycles de longueur* j *de* π_1 *en les supports des cycles de longueur* j *de* π_2.]

5. On appelle *partition* de l'entier $n \geq 1$, toute écriture $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ avec $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0$ et $r \geq 1$.

i) Faire la liste des partitions de 4 et de 5.

ii) En se servant de la question 4, faire la liste des classes de conjugaison de S_4 et de S_5.
[*Donner un représentant par classe.*]

iii) Notons $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier $n \geq 1$. Expliquer pourquoi il y a exactement $p(n)$ classes de conjugaison dans S_n.

Exercice 6

En se servant des partitions, faire la liste des ordres des permutations de S_4, S_5 et S_6.

Exercice 7 (Automorphismes)

Soit G un groupe. On note $Aut(G)$ l'ensemble des morphismes bijectifs $\varphi : G \to G$.

1. Montrer que $Aut(G)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Pour la suite, G est le groupe additif $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
Pour un automorphisme $\varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (i.e. une bijection telle que $\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$ pour tout $\overline{a}$ et $\overline{b}$), on pose $\hat{\varphi} = \varphi(\overline{1})$.

2. Soit φ et ψ deux automorphismes. Montrer que

i) $\varphi(\overline{a}) = \overline{a}\hat{\varphi}$ pour tout $\overline{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
[*Récurrence sur* $a \geq 1$]

ii) $\widehat{\psi \circ \varphi} = \hat{\psi}\hat{\varphi}$.

iii) $\hat{\varphi}$ est un inversible multiplicatif.

3. Montrer que l'application $Aut(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\star : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes.

4. A tire d'exemple, expliciter les automorphismes de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.