

Fiche de TD 1

Exercice 1 Trouver une application $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ qui est, respectivement, surjective et non injective, injective et non surjective, bijective.

Exercice 2

i) On se propose de montrer que l'application

$$g : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N} : (x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

est une bijection. On procède par diagonales: soit $d \in \mathbf{N}$ et D_d la droite du plan d'équation $x + y = d$.

- Faire la liste des images $g(x, y)$ pour $(x, y) \in D_d \cap \mathbf{N}^2$.

- Pour un entier $N \in \mathbf{N}$, on pose $A = \{l \in \mathbf{N}, \frac{l(l+1)}{2} \leq N\}$ et $d = \max(A)$.

Montrer qu'il existe un couple $(x, y) \in D_d \cap \mathbf{N}^2$ tel que $N = g(x, y)$.

- Conclure.

ii) Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, il existe une bijection $f_r : \mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}$.
[Procéder par récurrence.]

Exercice 3 Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^\times\} \subset [0, 1]$ et $\bar{A} = [0, 1] \setminus A$.

Montrer que l'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1[$ définie par

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \text{ si } n \in \mathbf{N}^\times \text{ et } f(x) = x \text{ si } x \in \bar{A},$$

est une bijection.

Exercice 4

Soit E un ensemble fini. Est-il vrai que le nombre de parties de cardinal pair de E est égal au nombre de parties de cardinal impair?

[On pourra se servir de l'application $f : P(E) \rightarrow P(E)$ définie comme suit: pour $a \in E$ fixé, $f(A) = A \setminus \{a\}$ si $a \in A$ et $f(A) = A \cup \{a\}$ si $a \notin A$.]

Dans ce qui suit, pour $n \in \mathbf{N}^\times$, l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est noté $[n]$.

Exercice 5 Soient $E = [n]$ et $F = [m]$. On note F^E l'ensemble des applications de E vers F .

i) Quel est le cardinal de F^E ?

ii) Expliciter une bijection

$$\varphi : F^E \rightarrow F^{|E|}.$$

[Une application $f : E \rightarrow F$ est définie par la liste de ses valeurs.]

En déduire le nombre $|F^E|$ d'applications de E vers F .

iii) Soit $A \in P(E)$. On note $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de A :

$$\mathbf{1}_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } \mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A.$$

Montrer que l'application

$$\psi : P(E) \rightarrow \{0, 1\}^E : A \mapsto \psi(A) = \mathbf{1}_A$$

est une bijection. En déduire le cardinal $|P(E)|$.

iii) Retrouver le cardinal $|P([n])|$ par une récurrence sur n .

[Observer que $P(n+1)$ est réunion disjointe des parties $X = \{A \in P([n+1]), n+1 \notin A\}$ et $Y = \{A \in P([n+1]), n+1 \in A\}$.]

Exercice 6

i) Donner une injection naturelle $\mathbf{N} \rightarrow P(\mathbf{N})$.

ii) (Lemme de Cantor) Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f : \mathbf{N} \rightarrow P(\mathbf{N})$.

[Montrer que pour toute f , la partie $A = \{n \in \mathbf{N}, n \notin f(n)\}$ n'admet pas d'antécédent.]

Exercice 7 Sur l'ensemble $E = [n]$, combien y-a-t-il de relations binaires? de relations réflexives? symétriques? réflexives et symétriques?

[Une relation est définie par son graphe $\Gamma \subset E \times E$.]

Exercice 8 Soit E un ensemble. Comme à l'ex 5, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de la partie $A \in P(E)$ et on pose $\overline{A} = E \setminus A$.

i) Soient $A, B \in P(E)$. Démontrer les propriétés:

$$\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$

ii) On suppose E fini de cardinal $|E| = n$. Calculer

$$\sum_{A, B \subset E} |A \cap B|, \quad \sum_{A, B \subset E} |A \cup B|.$$

[Pour une partie $C \in P(E)$, exprimer $|C|$ en fonction de $\mathbf{1}_C$.]

Exercice 9 On note $S^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité et $U_n = \{z \in \mathbf{C}, z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

i) Sur $\mathbf{R}$, montrer que la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbf{Z}$ est une relation d'équivalence.

Notons $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \subset P(\mathbf{R})$ l'ensemble de ses classes.

Montrer que l'application

$$\mathbf{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$$

est constante sur les classes et qu'elle induit une bijection

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow S^1 : \overline{x} \mapsto e^{2\pi i x}.$$

ii) On fixe un entier naturel $n \geq 2$. Sur $\mathbf{Z}$, montrer que la relation $x \sim y$ si $n \mid x - y$ est une relation d'équivalence.

Notons $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset P(\mathbf{Z})$ l'ensemble de ses classes. Montrer que l'application

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow U_n : \bar{x} \mapsto e^{\frac{2\pi i x}{n}}$$

est une bijection.

[Commencer par l'application $\mathbf{Z} \rightarrow U_n : x \mapsto e^{\frac{2\pi i x}{n}}$]

iii) On reprend la relation du i) sur $\mathbf{Q}$. Trouver une bijection

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} U_n.$$

Exercice 10 Sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, on pose $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = bc$. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Si l'on note la classe de (a, b) par $\frac{a}{b}$, l'ensemble quotient $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\})/\sim$ s'identifie à $\mathbf{Q}$.

Exercice 11 Pour $a, b \in \mathbf{N}$, posons $a \leq b$ si $a \mid b$ (i.e. s'il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $b = ac$.)

i) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$. Est-elle totale? Y-a-t-il un minimum? Un maximum?

ii) Mêmes questions avec $\{2^q, q \in \mathbf{N}\}$ à la place de $\mathbf{N}$.

Exercice 12 (Ordre lexicographique) Soit E un ensemble totalement ordonné par $\leq_E$.

Montrer que sur E^2 , la relation

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ si } a <_E a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq_E b')$$

est un ordre total.