

**FEUILLE D'EXERCICES 8**  
**RECHERCHE DE VALEURS PROPRES, MOINDRES CARRÉS,**  
**DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES**

---

**Exercice 1.** *Un exemple où la méthode de la puissance échoue*

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (1) Calculer les modes propres de  $A$ , i.e. ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.
- (2) Soit  $x \in \mathbb{C}^2$  non nul.
  - (a) Calculer  $(A^k x)_{k \in \mathbb{N}}$ .
  - (b) On pose  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left( \frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right)_k$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme hermitienne canonique sur  $\mathbb{C}^2$ . À quelle condition sur  $x$  la suite  $(\langle x_k, Ax_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle vers une valeur propre de  $A$  ?

**Exercice 2.** *Méthode de la puissance inverse avec translation*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ( $p \leq n$ ) ses valeurs propres deux à deux distinctes. Pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  donné, on souhaite calculer  $\lambda_i$ . Soit  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$x^{(0)} \notin (\ker(A - \lambda_i I))^\perp$$

Soit  $\mu$  tel que, pour tout  $j \neq i$ ,  $0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j|$ . On définit, à partir de  $x^{(0)}$ , la suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  par la récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A - \mu I)y^{(k+1)} = x^{(k)}, \quad x^{(k+1)} = \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) Vérifier que la construction de  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  revient à appliquer la méthode de la puissance à la matrice  $(A - \mu I)^{-1}$ .
- (2) On définit à chaque étape  $\gamma^{(k)} = \mu + \frac{1}{\langle x^{(k)}, y^{(k+1)} \rangle}$ . Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma^{(k)} = \lambda_i$ .

**Exercice 3.** *Régression linéaire*

Déterminer la droite du plan qui passe au plus près (au sens des moindres carrés) des points  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  et  $(3, 3)$ .

**Exercice 4.** *Approximation polynomiale au sens des moindres carrés*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On souhaite approcher une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dont on connaît seulement les valeurs  $y_1, \dots, y_n$  qu'elle prend en  $n$  points  $t_1, \dots, t_n$ . Pour cela on fixe un degré  $d \in \mathbb{N}$  et on détermine une approximation de  $f$  dans l'espace  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$ . On cherche donc  $P \in \mathcal{P}_d$  tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix} \right\| = \min_{Q \in \mathcal{P}_d} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix} \right\|.$$

- (1) Écrire le problème comme la résolution au sens des moindres carrés d'un système  $Ax = b$  pour une certaine matrice  $A \in \mathcal{M}_{n, d+1}(\mathbb{R})$  et un certain vecteur  $b \in \mathbb{R}^n$ .
- (2) Pour  $d = 0$  puis  $d = 1$ , résoudre explicitement le problème quand il possède une unique solution.
- (3) On suppose que les points  $t_1, \dots, t_n$  sont deux à deux distincts.  
À quelle condition sur  $d$  la matrice  $A^*A$  est-elle inversible ?

**Exercice 5.** *Moindres carrés et décomposition QR*

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  avec  $m \geq n$ . On suppose que  $A$  est de rang  $n$ . On rappelle que la méthode de Householder permet d'obtenir, dans ce cas, une décomposition  $QR$  de la forme

$$A = Q \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix}.$$

où  $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  est une matrice orthogonale et  $\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs.

- (1) Montrer que  $\tilde{R}$  est inversible.
- (2) Montrer que résoudre le problème  $Ax = b$  (pour  $b \in \mathbb{R}^m$ ) au sens des moindres carrés est équivalent à résoudre une équation du type  $\tilde{R}x = c$ .
- (3) Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Identifier  $\text{Im } D$  et  $\text{Ker } D$ .
- (b) On vérifie que  $D$  admet une décomposition  $D = QR$  avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre au sens des moindres carrés le problème  $Dx = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$ .

- (c) Que peut-on dire de la solution au sens des moindres carrés de  $Dx = (2 \ 1 \ 0 \ 3)^t$  ?

**Exercice 6.** *Décomposition en valeurs singulières*

- (1) Donner la décomposition en valeurs singulières  $M = UDV^T$  de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (2) Donner la décomposition en valeurs singulières de

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et représenter l'image du cercle unité par l'application linéaire associée à  $N$ .